FEDERICI COMMANDINI VRBINATIS

LIBER DE CENTRO GRAVITATIS SOLIDORVM.

BIBLIOTECA NAZ. ROMA VITTORIO EMANUELE

CVM PRIVILEGIO IN ANNOS X.

BONONIAE,

Ex Officina Alexandri Benacii.

M D LXV.

ALEXANDRO FARNESIO CARDINALI AMPLISSIMO, ET OPTIMO.

CVM multæ res in mathematicis diſciplinis nequaquam ſatis adhuc explicatæ ſint, tum perdifficilis, & perobſcura quæſtio eſt de centro grauitatis corporum ſolidorum; quæ, & ad cognoſcendum pulcherrima eſt, & ad multa, quæ à mathematicis proponuntur, præclare intelligenda maximum affert adiumentum. de qua neminem ex mathematicis, neque noſtra, neque patrum noſtrorum memoria ſcriptum reliquiſſe ſcimus. & quamuis in earum monumentis literarum nõ nulla reperiantur, ex quibus in hanc ſententiam adduci poſſumus, vt exiſtimemus hanc rem ab ijſdẽ vberrime tractatam eſſe; tamen neſcio quo fato adhuc in eiuſmodi librorum ignoratione verſamur. Archimedes quidem mathematicorũ princeps in libello, cuius inſcriptio eſt, κέντρα βαρῶν ἐπιπέδων, de centro planorum copioſiſsime, atque acutiſsime conſcripſit: & in eo explicando ſummã ingenii, & ſcientiæ gloriã eſt cõſecutus. Sed de cognitione cẽtri grauitatis corporũ ſolidorũ nulla in eius libris litera inuenitur. non multos abhinc annos MARCELLVS II. PONT. MAX.

cum adhuc Cardinalis eſſet, mihi, quæ ſua erat humanitas, libros eiuſdem Archimedis de iis, quæ vehuntur in aqua, latine redditos dono dedit. hos cum ego, ut aliorum ſtudia incitarem, emendãdos, & cõmentariis illuſtrandos ſuſcepiſſem, animaduerti dubitari non poſſe, quin Archimedes vel de hac materia ſcripſiſſet, vel aliorum mathematicorum ſcripta perlegiſſet. nam in iis tum alia nonnulla, tum maxime illam propoſitionem, ut euidentem, & aliàs probatam aſſumit, Centrũ grauitatis in portionibus conoidis rectanguli axem ita diuidere, vt pars, quæ ad verticem terminatur, alterius partis, quæ ad baſim dupla ſit. Verum hæc ad eam partem mathematicarum diſciplinarum præcipue refertur, in qua de centro grauitatis corporum ſolidorum tractatur. non eſt autem conſentaneum Archimedem illum admirabilem virum hanc propoſitionem ſibi argumentis confirmandam exiſtimaturum non fuiſſe, niſi eam vel aliis in locis probauiſſet, vel ab aliis probatam eſſe comperiſſet. quamobrem nequid in iis libris intelligendis deſiderari poſſet, ſtatui hanc etiam partem vel à veteribus prætermiſſam, vel tractatam quidem, ſed in tenebris iacentem, non intactam relinquere; atque ex aſsidua mathematicorum, præſertim Archimedis lectione, quæ mihi in mentem venerunt, ea in medium afferre; ut centri grauitatis corporum ſolidorum, ſi non perfectam, at certe aliquam noti-

tiam haberemus. Quem meum laborem nō mathematicis ſolum, verum iis etiam, qui naturæ obſcuritate delectantur, nō iniucundam fore ſperaui: multa enim προβλήματα cognitione digniſsima, quæ ad vtrāque ſcientiam attinent, ſeſe legentibus obtuliſſent. neque id vlli mirandum videri debet. vt enim in corporibus noſtris omnia membra, ex quibus certa quædam officia naſcuntur, diuino quodam ordine inter ſe implicata, & colligata ſunt: in iisq; admirabilis illa conſpiratio, quam σύμπνοιαν græci vocant, eluceſcit, ita tres illæ Philoſophiæ (ut Ariſtotelis verbo vtar) quæ veritatem ſolam propoſitam habent, licet quibuſdam quaſi finibus ſuis regantur: tamen earū vnaquæque per ſe ipſam quodammodo imperfecta eſt: neque altera ſine alterius auxilio plene comprehendi poteſt. complures præterea mathematicorum nodi ante hac explicatu difficillimi nullo negotio expediti eſſent: atque (ut vno verbo complectar) niſi mea valde amo, tractationem hanc meam ſtudioſis non mediocrem vtilitatem, & magnam voluptatem allaturam eſſe mihi perſuaſi. cum autem ad hoc ſcribendum aggreſſus eſsem, allatus eſt ad me liber Franciſci Maurolici Meſſanenſis, in quo vir ille doctiſsimus, & in iis diſciplinis exercitatiſsimus affirmabat ſe de centro grauitatis corporum ſolidorum conſcripſiſſe. cum hoc intellexiſſem, ſuſtinui me pauliſper: tacitus'que expectaui, dum opus cla-

riſsimi uiri, quem ſemper honoris cauſſa nomino, in lucem proferretur: mihi enim exploratisſimum erat: Franciſcum Maurolicum multo doctius, & exquiſitius hoc diſciplinarum genus ſcriptis ſuis traditurum. ſed cum id tardius fieret, hoc eſt, ut ego interpretor, diligentius, mihi diutius hac ſcriptione non ſuperſedendum eſſe duxi, præſertim cum iam libri Archimedis de iis, quæ uehuntur in aqua, opera mea illuſtrati typis excudēdi eſſent. nec me alia cauſſa impuliſſet, ut de centro grauitatis corporum ſolidorum ſcriberem, niſi ut hac etiam ratione lux eis quàm maxime fieri poſſet afferretur. atq; id eò mihi faciendum exiſtimaui, quòd in ſpem ueniebam fore, ut cum ego ex omnibus mathematicis primus, hanc materiam explicandam ſuſcepiſſem; ſi quid errati forte à me commiſſum eſſet, boni uiri potius id meæ de ſtudioſis hominibus bene merēdi cupiditati, quàm arrogantiæ aſcriberent. reſtabat ut conſiderarem, cui potisſimum ex principibus uiris contemplationem hanc, nunc primum memoriæ, ac literis proditam dedicarem. harum mearum cogitationum ſumma facta, exiſtimaui nemini conuenientius de centro grauitatis corporum opus dicari oportere, quàm ALEXANDRO FARNESIO grauisſimo, ac prudentisſimo Cardinali, quo in uiro ſumma fortuna ſemper cū ſumma uirtute certauit. quid enim maxime in te admirari debeant homines, obſcurum eſt; uſum'ne re-

rum, qui pueritiæ tempus extremum principium ha buiſti, & imperiorũ, & ad Reges, & Imperatores honorificentiſsimarum legationum; an excellentiam in omni genere literarum, qui vix adoleſcẽtulus, quæ homines iam confirmata ætate ſummo ſtudio, diuturniſq; laboribus didicerunt, ſcientia, & cognitione comprehendiſti: an conſilium, & ſapientiam in regendis, & gubernãdis Ciuitatibus, cuius grauiſsimæ ſententiæ in ſanctiſsimo Reip. Chriſtianæ conſilio dictæ, potius diuina oracula, quàm ſententiæ habitæ ſunt, & habentur. prætermitto liberalitatem, & munificentiam tuam, quam in ſtudioſiſsimo quoque ho neſtando quotidie magis oſtendis, ne videar auribus tuis potius, quàm veritati ſeruire. quamuis à te in tot præclaros viros tanta beneficia collata ſunt, & conferũtur, vt omnibus teſtatum ſit, nihil tibi eſſe charius, nihil iucundius, quàm eximia tua liberalitate homines ad amplexandam virtutem, licet currentes incitare. nihil dico de ceteris virtutibus tuis, quæ tantæ ſunt, quantæ ne cogitatione quidem comprehendi poſſunt. Quamobrem hac præcipue de cauſſa te huius meæ lucubrationis patronum eſſe volui, quam ea, qua ſoles, humanitate accipies. te enim ſemper ob diuinas virtutes tuas colui, & obſeruaui: nihilq; mihi fuit optatius; quàm tibi perſpectum eſſe meum erga te animum; ſingularemq; obſeruantiam. cœlum igitur digito attingam, ſi poſt grauiſsimas oc-

cupationes tuas legendo Federici tui libro aliquid impertiri temporis non grauaberis: cumq; in iis, qui tibi ſemper addicti erunt, numerare. Vale.

Federicus Commandinus.

FEDERICI COMMANDINI VRBINATIS LIBER DE CENTRO GRAVITATIS SOLIDORVM.

DIFFINITIONES.

CENTRVM grauitatis, Pappus Alexandrinus in octauo mathematicarum collectionum libro ita diffiniuit.

λέγομεν δὲ κέντρον βάρους ἑκάστου σώματος εἶναι σημεῖόν τι κείμενον ἐντός, ἀφ' οὗ κατ' ἐπίνοιαν ἀρτηθὲν τὸ βάρος ἠρεμεῖ φερόμενον, καὶ φυλάσσει τὴν ἐξ ἀρχῆς θέσιν, οὐ μὴ περιτρεπόμενον ἐν τῇ φορᾷ. hoc eſt,

Dicimus autem centrum grauitatis uniuſcuiuſque corporis punctum quoddam intra poſitum, à quo ſi graue appenſum mente concipiatur, dum fertur quieſcit; & ſeruat eam, quam in principio habebat poſitionem: neque in ipſa latione circumuertitur.

Poſſumus etiam hoc modo diffinire.

Centrum grauitatis uniuſcuiuſque ſolidæ figuræ eſt punctum illud intra poſitum, circa quod undique partes æqualium momentorum conſiſtunt: ſi enim per tale centrum ducatur planum figuram quomodocunque ſecans ſemper in par-

tes æqueponderantes ipſam diuidet.

2 Priſmatis, cylindri, & portionis cylindri axem appello rectam lineam, quæ oppoſitorum planorum centra grauitatis coniungit.

3 Pyramidis, coni, & portionis coni axem dico lineam, quæ à uertice ad centrum grauitatis baſis perducitur.

4 Si pyramis, conus, portio coni, uel conoidis ſecetur plano baſi æquidiſtante, pars, quæ eſt ad baſim, fruſtum pyramidis, coni, portionis coni, uel conoidis dicetur; quorum plana æquidiſtantia, quæ opponuntur ſimilia ſunt, & inæqualia: axes uero ſunt axium figurarum partes, quæ in ipſis comprehenduntur.

PETITIONES.

1 Solidarum figurarum ſimilium centra grauitatis ſimiliter ſunt poſita.

2 Solidis figuris ſimilibus, & æqualibus inter ſe aptatis, centra quoque grauitatis ipſarum inter ſe aptata erunt.

THEOREMA I. PROPOSITIO I.

Omnis figuræ rectilineæ in circulo deſcriptæ, quæ æqualibus lateribus, & angulis contine-

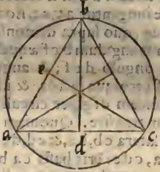
tur, centrum grauitatis eſt idem, quod circuli centrum.

Sit primo triangulum æquilaterum a b c in circulo deſcriptum: & diuiſa a c bifariam in d, ducatur b d. erit in linea b d centrum grauitatis triãguli a b c, ex tertia decima primi libri Archimedis de centro grauitatis planorum. Et quoniam linea a b eſt æqualis lineæ b c; & a d ipſi d c; eſtq; b d utrique communis: triangulum a b d æquale erit triangulo c b d: & anguli angulis æquales; qui æqualibus lateribus ſubtenduntur. ergo anguli ad d utriq; recti ſunt. quòd cùm linea b d ſecet a c bifariam, & ad angulos rectos; in ipſa b d eſt centrum circuli: quare in eadem b d linea erit centrum grauitatis trianguli, & circuli centrum. Similiter diuiſa a b bifariam in e, & ducta c e, oſtendetur in ipſa utrũque centrum contineri. ergo ea erunt in puncto, in quo lineæ b d, c e conueniunt. trianguli igitur a b c centrum grauitatis eſt idem, quod circuli centrum.

8.primi.

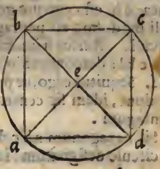
13.primi.

corol.primæ tertii



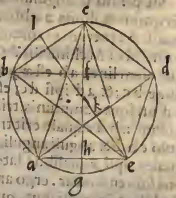
Sit quadratum a b c d in circulo deſcriptum: & ducantur a c, b d, quæ conueniant in e. ergo punctum e eſt centrum grauitatis quadrati, ex decima eiuſdem libri Archimedis. Sed cum omnes anguli ad a b c d recti ſint; erit a b c ſemicirculus: itemq; b c d: & propterea lineæ a c, b d diametri circuli:

31.tertii.



quæ quidem in centro conueniunt. idem igitur eſt centrum grauitatis quadrati, & circuli centrum.

Sit pentagonum æquilaterum, & æquiangulum in circulo deſcriptum a b c d e: & iuncta b d, bifariamq; in f diuiſa, ducatur c f, & producatur ad circuli circumferentiam in g; quæ lineam a e in h ſecet: deinde iungantur a c, c e. Eodem modo, quo ſupra demonſtrabimus angulum b c f æqualem eſſe angulo d c f; & angulos ad f utroſque rectos: & idcirco lineam c f g per circuli centrum tranſire. Quoniam igitur latera c b, b a, & c d, d e æqualia ſunt; & æquales anguli



4. Primi. c b a, c d e: erit baſis c a baſi c e, & angulus b c a angulo d c e æqualis. ergo & reliquus a c h, reliquo e c h. eſt autem c h utrique triangulo a c h, e c h communis. quare baſis a h æqualis eſt baſi h e: & anguli, qui ad h recti: ſuntq;

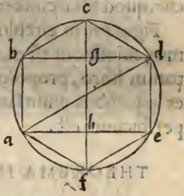
28. primi. recti, qui ad f. ergo lineæ a e, b d inter ſe ſe æquidiſtant. Itaque cum trapezij a b d e latera b d, a e æquidiſtantia à linea f h bifariam diuidantur; centrum grauitatis ipſius erit

13. Archimedis. in linea f h, ex ultima eiuſdem libri Archimedis. Sed trianguli b c d centrum grauitatis eſt in linea c f. ergo in eadem linea c h eſt centrum grauitatis trapezij a b d e, & trianguli b c d: hoc eſt pentagoni ipſius centrum: & centrum circuli. Rurſus ſi iuncta a d, bifariamq; ſecta in k, ducatur e k l: demonſtrabimus in ipſa utrumque centrum ineſſe. Sequitur ergo, ut punctum, in quo lineæ c g, e l conueniunt, idem ſit centrum circuli, & centrum grauitatis pentagoni.

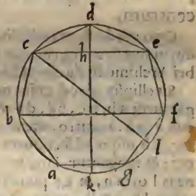
Sit hexagonum a b c d e f æquilaterum, & æquiangulum in circulo deſignatum: iunganturq; b d, a e: & bifariam ſe-

cta b d in g puncto, ducatur c g; & protrahatur ad circuli uſque circumferentiam; quæ ſecet a e in h. Similiter concludemus c g per centrum circuli tranſire: & bifariam ſecare lineam a e; itemq; lineas b d, a e inter ſe æquidiſtantes eſſe. Cum igitur c g per centrum circuli tranſeat; & ad punctũ f perueniat neceſſe eſt: quòd c d e f ſit dimidium circumferentiæ circuli. Quare in eadem diametro c f erunt centra grauitatis triangulorum b c d, a f e, & quadrilateri a b d e, ex quibus conſtat hexagonum a b c d e f. perſpicuum eſt igitur in ipſa c f eſſe circuli centrum, & centrum grauitatis hexagoni. Rurſus ducta altera diametro a d, eiſdem rationibus oſtendemus in ipſa utrumque cẽtrum ineſſe. Centrum ergo grauitatis hexagoni, & centrum circuli idem erit.

13. Archimedis. 9. eiuſdẽ.



Sit heptagonum a b c d e f g æquilaterum atque æquiangulum in circulo deſcriptum: & iungantur c e, b f, a g: diuiſa autem c e bifariam in pũcto h: & iuncta d h producatur in k. non aliter demonſtrabimus in linea d k eſſe centrum circuli, & centrum grauitatis trianguli c d e, & trapeziorum b c e f, a b f g, hoc eſt centrum totius heptagoni: & rurſus eadem centra in alia diametro c l ſimiliter ducta contineri. Quare & centrum grauitatis heptagoni, & centrum circuli in idem punctum conueniunt. Eodem mo



do in reliquis figuris æquilateris, & æquiangulis, quæ in circulo deſcribuntur, probabimus cẽtrum grauitatis earum, & centrum circuli idem eſſe. quod quidem demonſtrare oportebat.

Ex quibus apparet cuiuslibet figuræ rectilineæ in circulo plane deſcriptæ centrum grauitatis idẽ eſſe, quod & circuli centrum.

γνωρίμως Figuram in circulo plane deſcriptam appellamus, cuiuſmodi eſt ea, quæ in duodecimo elementorum libro, propoſitione ſecunda deſcribitur. ex æqualibus enim lateribus, & angulis conſtare perſpicuum eſt.

THEOREMA II, PROPOSITIO II.

Omnis figuræ rectilineæ in ellipſi plane deſcriptæ centrum grauitatis eſt idem, quod ellipſis centrum.

Quo modo figura rectilinea in ellipſi plane deſcribatur, docuimus in commentarijs in quintam propoſitionem libri Archimedis de conoidibus, & ſphæroidibus.

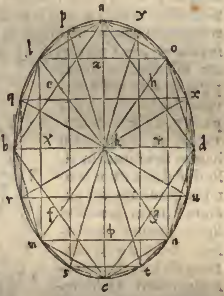
Sit ellipſis a b c d, cuius maior axis a c, minor b d: iunganturq; a b, b c, c d, d a: & biſariam diuidantur in punctis e f g h. à centro autem, quod ſit k ductæ lineæ k e, k f, k g, k h uſque ad ſectionem in puncta l m n o protrahantur: & iungantur l m, m n, n o, o l, ita ut a c ſecet lineas l o, m n, in z φ punctis, & b d ſecet l m, o n in χ ψ. erunt l k, k n linea una, itemque linea una ipſæ m k, k o: & lineæ b a, c d æquidiſtabunt lineæ m o: & b c, a d ipſi l n. rurſus l o, m n axi b d æquidiſtabunt: & l m,

o n

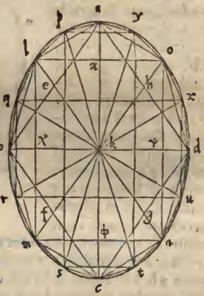
o n ipſi a c. Quoniam enim triangulorum a b k, a d k, latus b k eſt æquale lateri k d, & a k utrique commune; anguliq́; ad k recti: baſis a b baſi a d; & reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt. eadem quoque ratione oſtendetur b c æqualis c d; & a b ipſi b c. quare omnes a b, b c, c d, d a ſunt æquales. & quoniam anguli ad a æquales ſunt angulis ad c; erunt anguli b a c, a c d coalterni inter ſe æquales; itemq́; d a c, a c b. ergo c d ipſi b a; & a d ipſi b c æquidiſtat. At uero cum lineæ a b, c d inter ſe æquidiſtantes biſariam ſecentur in punctis e g; erit linea l e k g n diameter ſectionis, & linea una, ex demonſtratis in uigeſima octaua ſecundi conicorum. Et eadem ratione linea una m f k h o. Sunt autẽ a d, b c inter ſe ſe æquales, & æquidiſtantes. quare & earum dimidiæ a h, b f; itemq́; h d, f c; & quæ ipſas coniungunt rectæ lineæ æquales, & æquidiſtantes erunt. æquidiſtãt igitur b a, c d diametro m o: & pariter a d, b c ipſi l n æquidiſtare oſtendemus. Si igitur manẽte diametro a c intelligatur a b c portio ellipſis ad portionem a d c moueri, cum primum b applicuerit ad d, cõgruet tota portio toti portioni, lineaq́; b a lineæ a d; & b c ipſi c d congruet: punctum uero e cadet in h; f in g: & linea k e in lineam k h: & k f in k g. quare & e l in h o, et f m in g n. At ipſa l z in z o; et m φ in φ n cadet. congruet igitur triangulum l k z triangulo o k z: et

8. primi

33. primi



triangulum m k φ triangulo n k φ. ergo anguli l z k, o z k, m φ k, n φ k æquales ſunt, ac recti. quòd cum etiam recti
28. primi. ſint, qui ad k; æquidiſtabunt lineæ l o, m n axi b d. & ita demonſtrabuntur l m, o n ipſi a c æquidiſtare. Rurſus ſi iungantur a l, l b, b m, m c, c n, n d, d o, o a: & bifariam diuidantur: à centro autem k ad diuiſiones ductæ lineæ protrahantur uſque ad ſectionem in puncta p q r s t u x y: & poſtremo p y, q x, r u, s t, q r, p s, y t, x u coniungantur. Similiter oſtendemus lineas p y, q x, r u, s t axi b d æquidiſtantes eſſe: & q r, p s, y t, x u æquidiſtantes ipſi a c. Itaque dico harum figurarum in ellipſi deſcriptarum centrum grauitatis eſſe punctum k, idem quod & ellipſis centrum. quadrilateri enim a b c d centrum eſt k, ex decima eiuſdem libri Archimedis, quippe cũ in eo omnes diametri cõueniãt.



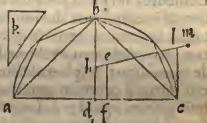
13. Archimedis. Sed in figura a l b m c n d o, quoniam trianguli a l b centrum grauitatis
Vltima. eſt in linea l e: trapezijq́; a b m o centrum in linea e k: trapezij o m c d in k g: & trianguli c n d in ipſa g n: erit magnitudinis ex his omnibus conſtantis, uidelicet totius figuræ centrum grauitatis in linea l n: & ob eandem cauſſam in linea o m. eſt enim trianguli a o d centrum in linea o h: trapezij a l n d in h k: trapezij l b c n in k f: & trianguli b m c in f m. cum ergo figuræ a l b m c n d o centrum grauitatis ſit in linea l n, & in linea o m; erit centrum ipſius punctum k, in

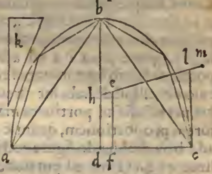
quo

quo ſcilicet l n, o m conueniunt. Poſtremo in figura a p l q b r m s c t n u d x o y centrum grauitatis trian guli p a y, & trapezii p l o y eſt in linea a z: trapeziorum uero l q x o, q b d x centrum eſt in linea z k: & trapeziorũ b r u d, r m n u in k φ: & denique trapezii m s t n; & triangu li s c t in φ c, quare magnitudinis ex his compoſitæ centrũ in linea a c conſiſtit. Rurſus trianguli q b r, & trapezii q l m r centrum eſt in linea b χ: trapeziorum l p s m, p a c s, a y t c, y o n t in linea χ φ: trapeziiq; o x u n, & trianguli x d u centrum in ψ d. totius ergo magnitudinis centrum eſt in linea b d. ex quo ſequitur, centrum grauitatis figuræ a p l q b r m s c t n u d x o y eſſe punctũ K, lineis ſcilicet a c, b d commune, quæ omnia demonſtrare oportebat.

THEOREMA III. PROPOSITIO III.

Cuiuslibet portionis circuli, & ellipſis, quæ dimidia non ſit maior, centrum grauitatis in portionis diametro conſiſtit.





HOC eodem prorſus modo demonſtrabitur, quo in libro de centro grauitatis planorum ab Archimede demonſtratũ eſt, in portione cõtenta recta linea, & rectanguli coni ſectione grauitatis cẽtrum eſſe in diametro portionis. Et ita demonſtrari po-

teſt in portione, quæ recta linea & obtuſianguli coni ſectione, ſeu hyperbola continetur.

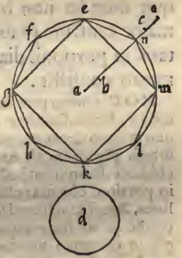
THEOREMA IIII. PROPOSITIO IIII.

In circulo & ellipſi idem eſt figuræ & grauitatis centrum.

SIT circulus, uel ellipſis, cuius centrum a. Dico a grauitatis quoque centrum eſſe. Si enim fieri poteſt, ſit b centrum grauitatis: & iuncta a b extra figuram in c producatur: quam uero proportionem habet linea c a ad a b, habeat circulus a ad alium circulum, in quo d; uel ellipſis ad aliam ellipſim: & in circulo, uel ellipſi figura rectilinea plane deſcribatur adeo, ut tandem relinquantur portiones quædam minores circulo, uel ellipſi d; quæ figura ſit e f g h k l m n. Illud uero in circulo fieri poſſe ex duodecimo elementorum libro, propoſitione ſecunda manifeſte conſtat; at in ellipſi nos demonſtrauimus in commentariis in quintam propoſitionem Archimedis de conoidibus, & ſphæroidibus. erit igitur a centrum grauitatis ipſius figuræ, quod proxime oſtẽdimus. Itaque quoniam circulus a ad circulum d; uel ellipſis a ad ellipſim d eandem proportionẽ habet, quam linea c a ad a b: portiones uero ſunt minores circulo uel ellipſi d: habebit circulus, uel ellipſis ad portiones maiorem proportionem, quàm c a ad a b: & diuidendo figura rectilinea e f g h k l m n ad portiones

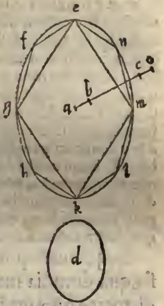
8.quinti.

19.quinti apud Cãpanum.



habebit

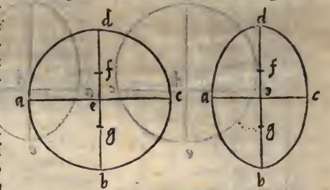
habebit maiorem proportionẽ, quam c b ad b a. fiat o b ad b a, ut figura rectilinea ad portiones. cum igitur à circulo, uel ellipſi, cuius grauitatis centrum eſt b, auferatur figura rectilinea e f g h k l m n, cuius centrum a; reliquæ magnitudinis ex portionibus compoſitæ centrum grauitatis erit in linea a b producta, & in puncto o, extra figuram poſito. quod quidem fieri nullo modo poſſe perſpicuum eſt. ſequitur ergo, ut circuli & ellipſis centrum grauitatis ſit punctum a, idem quod figuræ centrum.



8. Archimedis.

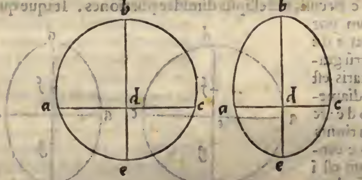
ALITER.

Sit circulus, uel ellipſis a b c d, cuius diameter d b, & centrum e: ducaturq; per e recta linea a c, ſecans ipſam d b ad rectos angulos. erunt a d c, a b c circuli, uel ellipſis dimidiæ portiones. Itaque quoniam portiõis a d c cẽtrũ grauitatis eſt in diametro d e: & portionis a b c centrum eſt ĩ ipſa e b: totius circuli, uel ellipſis grauitatis centrum erit in diametro d b. Sit autem portionis a d c cẽtrum grauitatis f: & ſumatur



in linea e b punctũ g, ita ut ſit g e æqualis e f. erit g portionis a b c centrum. nam ſi hæ portiones, quæ æquales & ſimiles ſunt, inter ſe ſe aptentur, ita ut b e cadat in d e, & punctum b in d cadet, & g in f: figuris autem æqualibus, & ſimilibus inter ſe aptatis, centra quoque grauitatis ipſarum inter ſe aptata erunt, ex quinta petitione Archimedis in libro de centro grauitatis planorum. Quare cum portionis a d c centrum grauitatis ſit f: & portionis a b c centrum g: magnitudinis, quæ ex utriſque efficitur: hoc eſt circuli uel ellipſis grauitatis centrum in medio lineæ f g, quod eſt e, conſiſtet, ex quarta propoſitione eiuſdem libri Archimedis. ergo circuli, uel ellipſis centrum grauitatis eſt idem, quod figuræ centrum. atque illud eſt, quod demonſtrare oportebat.

Ex quibus ſequitur portionis circuli, uel ellipſis, quæ dimidia maior ſit, centrum grauitatis in diametro quoque ipſius conſiſtere.



Sit enim maior portio a b c, cuius diameter b d, & compleatur circulus, uel ellipſis, ut portio reliqua ſit a e c, dia

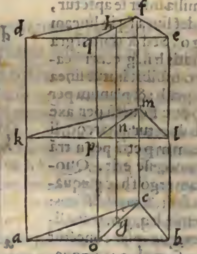
metrum

metrum habens e d. Quoniam igitur circuli uel ellipſis a e c b grauitatis centrum eſt in diametro b e, & portionis a e c centrum in linea e d; reliquæ portionis, uidelicet a b c centrum grauitatis in ipſa b d conſiſtat neceſſe eſt, ex octaua propoſitione eiuſdem.

THEOREMA V. PROPOSITIO V.

SI priſma ſecetur plano oppoſitis planis æquidiſtante, ſectio erit figura æqualis & ſimilis ei, quæ eſt oppoſitorum planorum, centrum grauitatis in axe habens.

Sit priſma, in quo plana oppoſita ſint triangula a b c, d e f; axis g h: & ſecetur plano iam dictis planis æquidiſtã te; quod faciat ſectionem k l m; & axi in pũcto n occurrat. Dico k l m triangulum æquale eſſe, & ſimile triangulis a b c d e f; atque eius grauitatis centrum eſſe punctum n. Quoniam enim plana a b c K l m æquidiſtantia ſecã tur a plano a e; rectæ lineæ a b, K l, quæ ſunt ipſorum cõmunes ſectiones inter ſe ſe æquidiſtant. 16. undecimi. Sed æquidiſtant a d, b e; cum a e ſit parallelogrammum, ex priſmatis diffinitione. ergo & a l parallelogrammũ erit; & propterea linea k l, ipſi a b æqualis. 34. primi Similiter demonſtrabitur l m æquidiſtans, & æqualis b c; & m k ipſi c a.



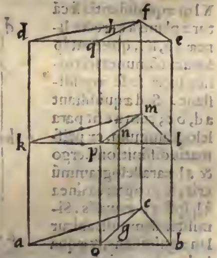
Itaque quoniam duæ lineæ K l, l m ſe ſe tangentes, duabus lineis ſe ſe tangentibus a b, b c æquidiſtant; nec ſunt in eodem plano: angulus k l m æqualis eſt angulo a b c: & ita angulus l m k, angulo b c a, & m k l ipſi c a b æqualis probabitur. triangulum ergo k l m eſt æquale, & ſimile triangulo a b c, quare & triangulo d e f. Ducatur linea c g o, & per ipſam, & per c f ducatur planum ſecans priſma, cuius & parallelogramnũ a e communis ſectio ſit o p q. tranſibit linea f q per h, & m p per n. nam cum plana æquidiſtantia ſecentur à plano c q, communes eorum ſectiones c g o, m p, f q ſibi ipſis æquidiſtabũt. Sed & æquidiſtant a b, k l, d e. anguli ergo a o c, k p m, d q f inter ſe æquales ſunt: & ſunt æquales qui ad puncta a k d conſtituuntur. quare & reliqui reliquis æquales; & triangula a c o, k m p, d f q inter ſe ſimilia erunt. Vt igitur c a ad a o, ita f d ad d q: & permutando ut c a ad f d, ita a o ad d q. eſt autem c a æqualis f d. ergo & a o ipſi d q. eadem quoque ratione & a o ipſi k p æqualis demonſtrabitur. Itaque ſi triangula, a b c, d e f æqualia & ſimilia inter ſe aptẽtur, cadet linea f q in lineam c g o. Sed & centrũ grauitatis h in g centrũ cadet. trãſibit igitur linea f q per h; & planum per c o & c f ductũ per axẽ g h ducetur: idcircoq; lineam m p etiã per n trãſire neceſſe erit. Quoniam ergo f h, c g æquales ſunt, & æquidiſtãtes: itemq; h q, g o; rectæ lineæ, quæ ipſas cõnectũt c m f, g n h, o p q æquales & æquidiſtãtes erũt.

10. undecimi

10. undecimi

4. ſexti

per 5. petitionem Archimedis.



æqui-

æquidiſtant autem c g o, m n p. ergo parallelogrãma ſunt o n, g m, & linea m n æqualis c g; & n p ipſi g o. aptatis igitur k l m, a b c triãgulis, quæ æqualia & ſimilia sũt; linea m p in c o, & punctum n in g cadet. Quòd cũ g ſit centrum grauitatis trianguli a b c, & n trianguli k l m grauitatis centrum erit id, quod demonſtrandum relinquebatur. Simili ratione idem contingere demonſtrabimus in aliis priſmatibus, ſiue quadrilatera, ſiue plurilatera habeant plana, quæ opponuntur.

COROLLARIVM.

Ex iam demonſtratis perſpicue apparet, cuius libet priſmatis axem, parallelogrammorum lateribus, quæ ab oppoſitis planis ducũtur æquidiſtare.

THEOREMA VI. PROPOSITIO VI.

Cuiuslibet priſmatis centrum grauitatis eſt in plano, quod oppoſitis planis æquidiſtans, reliquorum planorum latera bifariam diuidit.

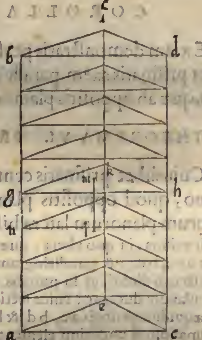
Sit priſma, in quo plana, quæ opponuntur ſint triangula a c e, b d f; & parallelogrammorum latera a b, c d, e f bifariam diuidãtur in punctis g h k: per diuiſiones autem planum ducatur; cuius ſectio figura g h k. erit linea g h æquidiſtans lineis a c, b d & h k ipſis c e, d f. quare ex decimaquinta undecimi elementorum, planum illud planis a c e, b d f æquidiſtabit, & faciet ſectionem figuram ipſis æqualem, & ſimilem, ut proxime demonſtrauimus. Dico centrum grauitatis priſmatis eſſe in plano g h k. Si enim fieri poteſt, ſit eius centrum l: & ducatur l m uſque ad planum g h k, quæ ipſi a b æquidiſtet.

33. primi

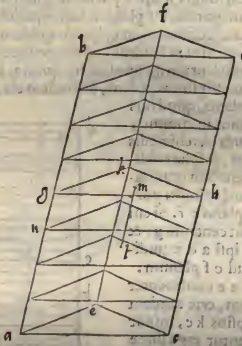
5. huius

1. decimi ergo linea a g continenter in duas partes æquales diuiſa, relinquetur tãdem pars aliqua n g, quæ minor erit l m. Vtraque uero linearum a g, g b diuidatur in partes æquales ipſi n g: & per puncta diuiſionum plana oppoſitis planis æquidiſtantia ducantur. erunt ſectiones figuræ æquales, ac ſimiles ipſis a c, b d f: & totum priſma diuiſum erit in priſmata æqualia, & ſimilia: quæ cum inter ſe congruãt; & grauitatis centra ſibi ipſis congruentia, reſpondentiaq; habebunt. Itaq; ſunt magnitudines quædã æquales ipſi n h, & numero pares, quarum centra grauitatis in eadẽ recta linea conſtituuntur: duæ uero mediæ æquales ſunt: & quæ ex utraque parte ipſarum ſimiliter æquales: & æquales rectæ lineæ, quæ inter grauitatis centra interiiciuntur: quare ex corollario quintæ propoſitionis primi libri Archimedis de centro grauitatis planorum; magnitudinis ex his omnibus compoſitæ centrum grauitatis eſt in medio lineæ, quæ magnitudinum mediarum centra coniungit. at qui non ita res habet,

5 huius



bet, ſi quidem l extra medias magnitudines poſitum eſt. Conſtat igitur centrum grauitatis priſmatis eſſe in plano

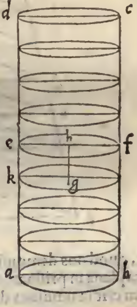


g h k, quod nos demonſtrandum propoſuimus. At ſi oppoſita plana in priſmate ſint quadrilatera, uel plurilatera, eadem erit in omnibus demonſtratio.

THEOREMA VII. PROPOSITIO VII.

Cuiuslibet cylindri, & cuiuslibet cylindri portionis centrum grauitatis eſt in plano, quod baſibus æquidiſtans, parallelogrammi per axem latera bifariam ſecat.

SIT cylindrus, uel cylindri portio a c: & plano per axem ducto ſecetur; cuius ſectio ſit parallelogrammum a b c d: & bifariam diuiſis a d, b c parallelogrammi lateribus, per diuiſionum puncta e f planum baſi æquidiſtans ducatur; quod faciet ſectionem, in cylindro quidem circulum æqualem iis, qui ſunt in baſibus, ut demonſtrauit Serenus in libro cylindricorum, propoſitione quinta: in cylindri uero portione ellipſim æqualem, & ſimilem eis, quæ ſunt in oppoſitis planis, quod nos demonſtrauimus in commentariis in librum Archimedis de conoidibus, & ſphæroidibus. Dico centrum grauitatis cylindri, uel cylindri portionis eſſe in plano e f. Si enim fieri poteſt, ſit centrum g: & ducatur g h ipſi a d æquidiſtans, uſque ad e f planum. Itaque linea a e continenter diuiſa bifariam, erit tandem pars aliqua ipſius k e, minor g h. Diuidantur ergo lineæ a e, e d in partes æquales ipſi k e: & per diuiſiones plana baſibus æquidiſtantia ducātur. erunt iam ſectiones, figuræ æquales, & ſimiles eis, quæ ſunt in baſibus: atque erit cylindrus in cylindros diuiſus: & cylindri portio in portiones æquales, & ſimiles ipſi k f. reliqua ſimiliter, ut ſuperius in priſmate concludentur.



THEO-

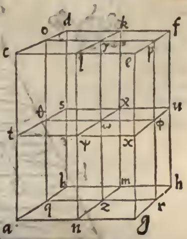


THEOREMA VIII. PROPOSITIO VIII.

Cuiuslibet priſmatis, & cuiuslibet cylindri, uel cylindri portionis grauitatis centrum in medio ipſius axis conſiſtit.

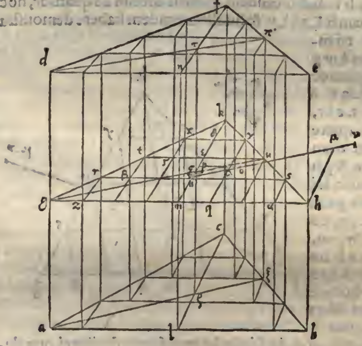
Sit primum a f priſma æquidiſtantibus planis contentũ, quod ſolidum parallelepipedum appellatur: & oppoſitorum planorum c f, a h, d a, f g latera biſariam diuidantur in punctis k l m n o p q r s t u x: & per diuiſiones ducantur plana k n, o r, s x. communes autem eorum planorum ſectiones ſint lineæ y z, θ φ, χ ψ: quæ in puncto ω conueniãt. erit ex decima eiuſdem libri Archimedis parallelogrammi c f centrum grauitatis punctum y; parallelogrammi a h

centrum z: parallelogrammi a d, θ: parallelogrammi f g, φ: parallelogrammi d h, χ: & parallelogrammi c g centrũ ψ: atque erit ω punctum medium uniuſcuiuſque axis, uidelicet eius lineæ, quæ oppoſitorum planorũ centra coniungit. Dico ω centrum eſſe grauitatis ipſius ſolidi. eſt
6. huius enim, ut demonſtrauimus, ſolidi a f centrum grauitatis in plano K n; quod oppoſitis planis a d, g f æquidiſtans reliquorum planorum latera bifariam diuidit: & ſimili ratione idem centrum eſt in plano o r, æquidiſtante planis a e, b f oppoſitis. ergo in communi ipſorum ſectione: uidelicet in linea y z. Sed eſt etiam in plano t u, quod quidẽ y z ſecat in ω. Conſtat igitur centrum grauitatis ſolidi eſſe punctum ω, medium ſcilicet axium, hoc eſt linearum, quæ planorum oppoſitorum centra coniungunt.



Sit aliud priſma a f; & in eo plana, quæ opponuntur, triangula a b c, d e f: diuiſisq; bifariam parallelogrammorum lateribus a d, b e, c f in punctis g h k, per diuiſiones planũ ducatur, quod oppoſitis planis æquidiſtans faciet ſectionẽ triangulum g h κ æquale, & ſimile ipſis a b c, d e f. Rurſus diuidatur a b bifariam in l: & iuncta c l per ipſam, & per e κ f planum ducatur priſma ſecans, cuius, & parallelogrã mi a e communis ſectio ſit l m n. diuidet punctum m lineam g h bifariam; & ita n diuidet lineam d e: quoniam
5. huius triangula a c l, g κ m, d f n æqualia ſunt, & ſimilia, ut ſupra demonſtrauimus: Iam ex iis, quæ tradita ſunt, conſtat centrum grauitatis priſmatis in plano g h κ contineri. Dico ipſum eſſe in linea k m. Si enim fieri poteſt, ſit o centrum: & per

& per σ ducatur σ p ad k m ipſi h g æquidiſtans. Itaque linea h m biſariã uſque eò diuidatur, quoad reliqua ſit pars quædam q m, minor σ p. deinde h m, m g diuidantur in partes æquales ipſi m q: & per diuiſiones lineæ ipſi m K æquidiſtantes ducantur. puncta uero, in quibus hæ triangulorum latera ſecant, coniungantur ductis lineis r s, t u;

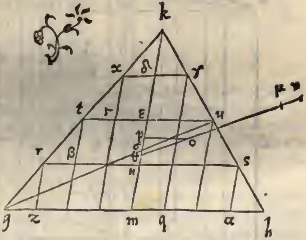


x y; quæ baſi g h æquidiſtabunt. Quoniam enim lineæ g z, h α ſunt æquales: itemq; æquales g m, m h: ut m g ad g z, ita erit m h, ad h α: & diuidendo, ut m z ad z g, ita m α ad α h. Sed ut m z ad z g, ita k r ad r g: & ut m α ad α h, ita k s ad s h. quare ut k r ad r g, ita κ s ad s h. æquidiſtant igitur inter ſe ſe r s, g h. eadem quoque ratione demonſtrabimus 2. ſexti. 11. quinti 2. ſexti.

tu,xy ipſi g h æquidiſtare. Et quoniam triangula, quæ fiunt à lineis K y,y u,u s, s h æqualia ſunt inter ſe, & ſimilia triangulo K m h: habebit triangulum K m h ad triangulũ K δ y duplam proportionem eius, quæ eſt lineæ x h ad K y. ſed K h poſita eſt quadrupla ipſius k y. ergo triangulum k m h ad triangulum K δ y eãdem proportionem habebit, quam ſexdecim ad unũ: & ad quatuor triangula k δ y, y u, u s,s α h habebit eandem, quam ſexdecim ad quatuor, hoc eſt quam h K ad k y. & ſimiliter eandem habere demonſtrabitur triangulum k m g ad quatuor triãgula K δ x, x γ t, t β r, r z g. quare totum triangulum K g h ad omnia triangula g z r, r β t, t γ x, x δ K, K δ y, y u, u s, s α h ita erit, ut h k ad k y, hoc eſt ut h m ad m q. Si igitur in triangulis a b c, d e f deſcribantur figuræ ſimiles ei, quæ deſcripta eſt in g h K triangulo: & per lineas ſibi reſpondentes plana ducantur: totum priſma a f diuiſum erit in tria ſolida parallelepipeda y γ, u β, s z, quorum baſes ſunt æquales & ſimiles ipſis parallelogrammis y γ, u β, s z: & in octo priſmata g z r, r β t, t γ x, x δ K, k δ y, y u, u s, s α h: quorum item baſes æquales, & ſimiles ſunt dictis triangulis; altitudo autem in omnibus, totius priſmatis altitudini æqualis.

19. ſexti

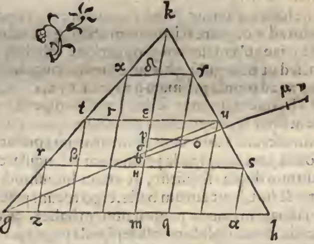
2. uel 11 quinti.



Itaque ſolidi parallelepipedi y γ centrum grauitatis eſt in linea δ ι: ſolidi u β centrum eſt in linea ε ν: & ſolidi s z in linea ε m, quæ quidem lineæ axes ſunt, cum planorum oppoſitorum centra coniungant. ergo magnitudinis ex his ſolidis compoſitæ centrum grauitatis eſt in linea δ m, quod ſit θ; & iuncta θ o producatur: à puncto autem h ducatur h μ ipſi m k æquidiſtans, quæ cum θ o in μ conueniat. triangulum igitur g h k ad omnia triangula g z r, r β t, t γ x, x δ k, k δ y, y u, u s, s α h eandem habet proportionem, quam h m ad m q; hoc eſt, quam μ θ ad θ λ: nam ſi h m, μ θ produci intelligantur, quouſque coeant; erit ob linearum q y, m k æquidiſtantiam, ut h q ad q m, ita μ λ ad ad λ θ: & componendo, ut h m ad m q, ita μ θ ad θ λ. linea uero θ o maior eſt, quàm θ λ: habebit igitur μ θ ad θ λ maiorem proportionem, quàm ad θ o. quare triangulum etiam g h κ ad omnia iam dicta triangula maiorem proportionẽ habebit, quàm μ θ ad θ o. ſed ut triangulũ g h κ ad omnia triangula, ita totũ priſma a f ad omnia priſmata g z r, r β t, t γ x, x δ κ, κ δ y, y u, u s, s α h: quoniam enim ſolida parallelepipeda æque alta, eandem inter ſe proportionem habent, quam baſes; ut ex trigeſimaſecunda undecimi elementorum conſtat. ſunt autem ſolida parallelepipeda priſmatum triangulares baſes habentium dupla: ſequitur, ut etiam huiuſmodi priſmata inter ſe ſint, ſicut eorum baſes. ergo totum priſma ad omnia priſmata maiorem proportionem habet, quam μ θ ad θ o: & diuidendo ſolida parallelepipeda y γ, u β, s z ad omnia priſmata proportionem habent maiorem, quàm μ o ad o θ. fiat ν o ad o θ, ut ſolida parallelepipeda y γ, u β, s z ad omnia priſmata. Itaque cum à priſmate a f, cuius cẽtrum grauitatis eſt o, auferatur magnitudo ex ſolidis parallelepipedis y γ, u β, s z conſtans: atque ipſius grauitatis centrum ſit θ: reliquæ magnitudinis, quæ ex omnibus priſmatibus conſtat, grauitatis centrum erit in linea θ o producta: & in puncto ν, ex octaua propoſitione eiuſdem libri Archi-

[Margin notes: 8. quinti. — 28. undecimi — 15. quinti — 19. quinti apud Cãpanum.]

medis. ergo punctum ν extra priſma a f poſitum, centrũ erit magnitudinis cõpoſitæ ex omnibus priſmatibus g z r, r β t, t γ x, x δ k, k δ y, y u, u s, s α h, quod fieri nullo modo poteſt. eſt enim ex diffinitione cent rum grauitatis ſolidæ figuræ intra ipſam poſitum, non extra. quare relinquitur, ut cẽtrum grauitatis priſmatis ſit in linea K m. Rurſus b c biſariam in ξ diuidatur: & ducta a ξ, per ipſam, & per lineam a g d planum ducatur; quod priſma ſecet: faciatq; in parallelogrammo b f ſectionem ξ π diuidet punctum π lineam quoque c f biſariam: & erit plani eius, & trianguli g h K communis ſectio g u; quòd pũctum u in medio lineæ h K

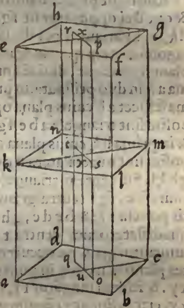


poſitum ſit. Similiter demonſtrabimus centrum grauitatis priſmatis in ipſa g u ineſſe. ſit autem planorum c f n l, a d π ξ communis ſectio linea ρ σ τ; quæ quidem priſmatis axis erit, cum tranſeat per centra grauitatis triangulorum a b c, g h κ, d e f, ex quartadecima eiuſdem. ergo centrum grauitatis priſmatis a f eſt punctum σ, centrum ſcilicet

trianguli

trianguli g h K, & ipſius ρ τ axis medium.

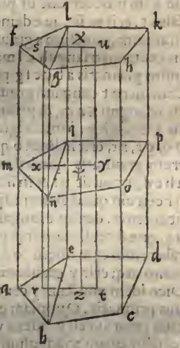
Sit priſma a g, cuius oppoſita plana ſint quadrilatera a b c d, e f g h: ſeceturq; a e, b f, c g, d h bifariam & per diuiſiones planum ducatur; quod ſectionem faciat quadrilaterum K l m n. Deinde iuncta a c per lineas a c, a e ducatur planum ſecãs priſma, quod ipſum diuidet in duo priſmata triangulares baſes habentia a b c e f g, a d c e h g. Sint autẽ triangulorũm a b c, e f g grauitatis centra o p: & triangulorum a d c, e h g centra q r: iunganturq; o p, q r; quæ plano k l m n occurrant in punctis s t. erit ex iis, quæ demonſtrauimus, punctum s grauitatis centrum trianguli κ l m; & ipſius priſmatis a b c e f g: punctum uero t centrum grauitatis trianguli K n m, & priſmatis a d c, e h g. iunctis igitur o q, p r, s t, erit in linea o q cẽtrum grauitatis quadrilateri a b c d, quod ſit u: & in linea p r cẽtrum quadrilateri e f g h: ſit autem x. denique iungatur u x, quæ ſecet lineam ſ t in y. ſecabit enim cum ſint in eodem plano: atq; erit y grauitatis centrum quadrilateri K l m n. 5.huius.



Dico idem punctum y centrum quoque grauitatis eſſe totius priſmatis. Quoniam enim quadrilateri k l m n grauitatis centrum eſt y: lineas y ad y t eandem proportionem habebit, quam triangulum κ n m ad triangulum k l m, ex 8 Archimedis de centro grauitatis planorum. Vt autem triãgulum κ n m ad ipſum κ l m, hoc eſt ut triangulum a d c ad triangulum a b c, æqualia enim ſunt, ita priſma a d c e h g

ad priſma a b c e f g. quare linea s y ad y t eandem proportionem habet, quam priſma a d c e h g ad priſma a b c e f g. Sed priſmatis a b c e f g centrum grauitatis eſt s: & priſmatis a d c e h g centrum t. magnitudinis igitur ex his compoſitæ, hoc eſt totius priſmatis a g centrum grauitatis eſt punctum y; medium ſcilicet axis u x, qui oppoſitorum planorum centra coniungit.

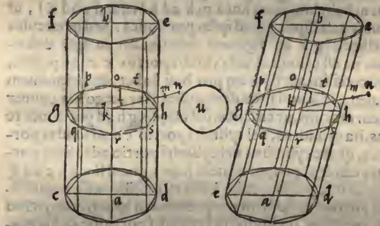
Rurſus ſit priſma baſim habens pentagonum a b c d e: & quod ei opponitur ſit f g h k l: ſec enturq; a f, b g, c h, d k, e l biſariam: & per diuiſiones ducto plano, ſectio ſit pẽtagonũ m n o p q. deinde iuncta e b per lineas l e, e b aliud planum ducatur, diuidẽs priſma a k in duo priſmata, in priſma ſcilicet a l, cuius plana oppoſita ſint triangula a b e f g l: & in prima b k, cuius plana oppoſita ſint quadrilatera b c d e g h k l. Sint autem triangulorum a b e, f g l centra grauitatis puncta r ſ: & b c d e, g h k l quadrilaterorum centra t u: iunganturq; r s, t u occurrentes plano m n o p q in punctis x y. & itidem iungãtur r t, ſ u, x y. erit in linea r t cẽtrum grauitatis pentagoni a b c d e; quod ſit z: & in linea ſ u centrum pentagoni f g h k l: ſit autem χ: & ducatur z χ, quæ dicto plano in ψ occurrat. Itaq; punctum x eſt centrum grauitatis trianguli m n q, ac priſmatis a l: & y grauitatis centrum quadrilateri n o p q, ac priſmatis b k. quare y centrum erit pentagoni m n o p q. &



ſimiliter

ſimiliter demonſtrabitur totius priſmatis a K grauitatis eſſe centrum. Simili ratione & in aliis priſmatibus illud idem facile demonſtrabitur. Quo autem pacto in omni figura rectilinea centrum grauitatis inueniatur, docuimus in commentariis in ſextam propoſitionem Archimedis de quadratura parabolæ.

Sit cylindrus, uel cylindri portio c e cuius axis a b: ſeceturq; plano per axem ducto; quod ſectionem faciat parallelogrammum c d e f: & diuiſis c f, d e bifariam in punctis



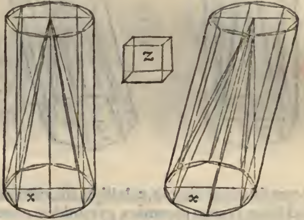
g h, per ea ducatur planum baſi æquidiſtans. erit ſectio g h circulus, uel ellipſis, centrum habens in axe; quod ſit K: atque erunt ex iis, quæ demonſtrauimus, centra grauitatis planorum oppoſitorum puncta a b: & plani g h ipſum k, in quo quidem plano eſt centrum grauitatis cylindri, uel cylindri portionis. Dico punctum K cylindri quoque, uel cylindri portionis grauitatis centrum eſſe. Si enim fieri poteſt, ſit l centrum: ducaturq; k l, & extra figuram in m producatur. quam uero proportionem habet linea m K ad k l 4. huius.

habeat circulus, uel ellipſis g h ad aliud ſpacium, in quo u: & in circulo, uel ellipſi plane deſcribatur rectilinea figura, ita ut tãdem relinquãtur portiones minores ſpacio u, quæ ſit o p g q r s h t: deſcriptaq; ſimili figura in oppoſitis planis c d, f e, per lineas ſibi ipſis reſpondentes plana ducãtur. Itaque cylindrus, uel cylindri portio diuiditur in priſma, cuius quidem baſis eſt figura rectilinea iam dicta, centrumque grauitatis punctum K: & in multa ſolida, quæ pro baſibus habent relictas portiones, quas nos ſolidas portiones appellabimus. cum igitur portiones ſint minores ſpacio u, circulus, uel ellipſis g h ad portiones maiorem proportionem habebit, quàm linea m k ad K l. fiat n K ad K l, ut circulus uel ellipſis g h ad ipſas portiones. Sed ut circulus uel ellipſis g h ad figuram rectilineam in ipſa deſcriptam, ita eſt cylindrus uel cylindri portio c e ad priſma, quod rectilineam figuram pro baſi habet, & altitudinem æqualem; id, quod infra demonſtrabitur. ergo per conuerſionem rationis, ut circulus, uel ellipſis g h ad portiones relictas, ita cylindrus, uel cylindri portio c e ad ſolidas portiones, quare cylindrus uel cylindri portio ad ſolidas portiones eandem proportionem habet, quam linea n K ad k l. & diuidendo priſma, cuius baſis eſt rectilinea figura ad ſolidas portiones eandem proportionem habet, quam n l ad l k. & quoniam a cylindro uel cylindri portione, cuius grauitatis centrum eſt l, aufertur priſma baſim habens rectilineam figurã, cuius centrũ grauitatis eſt K: reſiduæ magnitudinis ex ſolidis portionibus cõpoſitæ grauitatis cẽtrũ erit in linea k l protracta, & in puncto n; quod eſt abſurdũ. relinquitur ergo, ut cẽtrum grauitatis cylindri, uel cylindri portionis ſit punctũ k. quæ omnia demonſtrãda propoſuimus.

At uero cylindrum, uel cylindri portionẽ c e ad priſma, cuius baſis eſt rectilinea figura in ſpacio g h deſcripta, & altitudo æqualis; eandem habere

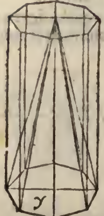
bere proportionem, quam ſpacium g h ad dictã figuram, hoc modo demonſtrabimus.

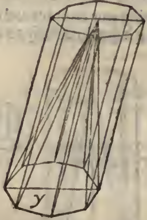
Intelligatur circulus, uel ellipſis x æqualis figuræ rectilineæ in g h ſpacio deſcriptæ: & ab x conſtituatur conus, uel



coni portio, altitudinẽ habens eandẽ, quã cylindrus uel cylindri portio c e. Sit deinde rectilinea figura, in qua y eadẽ, quæ in ſpacio g h deſcripta eſt: & ab hac pyramis æquealta conſtituatur. Dico conũ uel coni portionẽ x pyramidi y æqualẽ eſſe. niſi enim ſit æqualis, uel maior, uel minor erit.

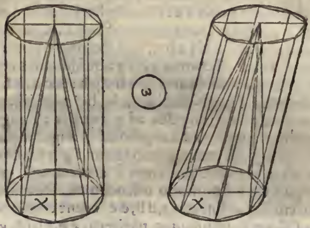
Sit primum maior, et exuperet ſolido z. Itaque in circulo, uel ellipſi x deſcribatur figura rectilinea; & in ea pyramis eandem, quam conus, uel coni portio altitudinem habens, ita ut portiones relictæ minores ſint ſolido z, quemadmodum docetur in duodecimo libro elementorum propoſitione undecima. erit pyramis x adhuc pyramide y maior. & quoniam piramides æque altæ inter ſe ſunt, ſicuti baſes; pyramis x ad piramidem y eandem proportionem habet, quàm figura rectilinea x ad figuram y. Sed figura recti 6. duodecimi.





linea x cum ſit minor circulo, uel ellipſi, eſt etiam minor figura rectilinea y. ergo pyramis x pyramide y minor erit. Sed & maior; quod fieri nõ poteſt. At ſi conus, uel coni portio x ponatur minor pyramide y: ſit alter conus æque altus, uel altera coni portio χ ipſi pyramidi y æqualis. erit eius baſis circulus, uel ellipſis maior circulo, uel ellipſi x, quorum exceſſus ſit ſpacium ω. Si igitur in circulo, uel ellipſi χ figura rectilinea deſcribatur, ita ut portiones relictæ ſint ω ſpacio minores, eiuſmodi figura adhuc maior erit circulo, uel ellipſi x, hoc eſt figura rectilinea y. & pyramis in ea conſtituta minor cono, uel coni portione χ, hoc eſt minor pyramide y. eſt ergo ut χ figura rectilinea ad figuram rectilineam y, ita pyramis χ ad pyramidem y. quare cum figura rectilinea χ ſit maior figura y: erit & pyramis χ pyramide y maior. ſed erat minor; quod rurſus fieri non poteſt. non eſt igitur conus, uel coni portio x neque maior, neque minor pyramide y. ergo ipſi neceſſario eſt æqualis. Itaque quoniam ut conus ad conum, uel coni portio ad co

ni



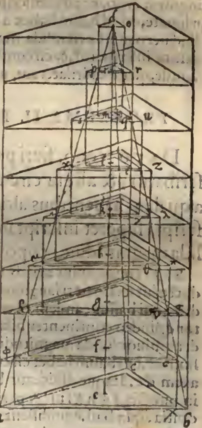
ni portionem, ita eſt cylindrus ad cylindrum, uel cylindri portio ad cylindri portionem: & ut pyramis ad pyramidem, ita priſma ad priſma, cum eadem ſit baſis, & æqualis altitudo; erit cylindrus uel cylindri portio x priſmati y æqualis. eſtq; ut ſpacium g h ad ſpacium x, ita cylindrus, uel cylindri portio c e ad cylindrum, uel cylindri portionem x. Conſtat igitur cylindrum uel cylindri portionẽ c e, ad priſma y, quippe cuius baſis eſt figura rectilinea in ſpacio g h deſcripta, eandem proportionem habere, quam ſpacium g h habet ad ſpacium x, hoc eſt ad dictam figuram. quod demonſtrandum fuerat. 7. quinti

THEOREMA IX. PROPOSITIO IX.

Si pyramis ſecetur planó baſi æquidiſtante; ſectio erit figura ſimilis ei, quæ eſt baſis, centrum grauitatis in axe habens.

PROBLEMA I. PROPOSITIO X.

DATA qualibet pyramide, fieri poteſt, ut figura ſolida in ipſa inſcribatur, & altera circũſcribatur ex priſmatibus æqualem altitudinem habẽtibus, ita ut circumſcripta inſcriptam excedat magnitudine, quæ minor ſit quacũque ſolida magnitudine propoſita.



Sit pyramis, cuius baſis triangulũ a b c; axis d e. Sitq; priſma, quod eandẽ baſim habeat, & axem eundem. Itaque hoc priſmate continenter ſecto biſariam, plano baſi æquidiſtãte; relinquetur tãdem priſma quoddam minus propoſita magnitudine: quod quidem baſim eandem habeat, quam pyramis, & axem e f. diuidatur d e in partes æquales ipſi e f in punctis g h k l m n: & per diuiſiones plana ducãtur: quæ baſibus æquidiſtent, erunt ſectiones, triangula ipſi a b c ſimilia, ut proxime oſtendimus. ab unoquoque autẽ horum triangulorum duo priſmata cõſtruantur; unum quidem ad partes e; alterum ad

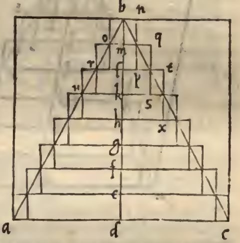
partes d. in pyramide: igitur inſcripta erit quædam figura, ex priſmatibus æqualem altitudinem habentibus cõſtans, ad partes e: & altera circumſcripta ad partes d. Sed unumquodque eorum priſmatum, quæ in figura inſcripta continentur, æquale eſt priſmati, quod ab eodem fit triangulo in figura circumſcripta: nam priſma p q priſmati p o eſt æquale; priſma s t æquale priſmati s r; priſma x y priſmati x u; priſma η θ priſmati η z; priſma μ ν priſmati μ λ; priſma ρ σ priſmati ρ π; & priſma φ χ priſmati φ τ æquale. relinquitur ergo, ut circumſcripta figura exuperet inſcriptã priſmate, quod baſim habet a b c triangulum, & axem e f. Illud uero minus eſt ſolida magnitudine propoſita. Eadẽ ratione inſcribetur, & circumſcribetur ſolida figura in pyramide, quæ quadrilateram, uel plurilaterã baſim habeat.

PROBLEMA II. PROPOSITIO XI.

DATO cono, fieri poteſt, ut figura ſolida inſcribatur, & altera circumſcribatur ex cylindris æqualem habentibus altitudinem, ita ut circumſcripta ſuperet inſcriptam, magnitudine, quæ ſolida magnitudine propoſita ſit minor.

SIT conus, cuius axis b d: & ſecetur plano per axem ducto, ut ſectio ſit triangulum a b c: intelligaturq; cylindrus, qui baſim eandem, & eundem axem habeat. Hoc igitur cylindro continenter bifariam ſecto, relinquetur cylindrus minor ſolida magnitudine propoſita. Sit autem is cylindrus, qui baſim habet circulum circa diametrum a e, & axem d e. Itaque diuidatur b d in partes æquales ipſi d e in punctis f g h k l m: & per ea ducantur plana conum ſecantia; quæ baſi æquidiſtent. erunt ſectiones circuli, centra in axi habentes, ut in primo libro conicorum, propoſitione

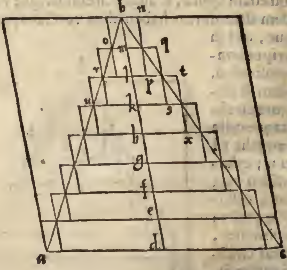
tione quarta Apollonius demonſtrauit. Si igitur à ſingulis horum circulorum, duo cylindri fiant; unus quidem ad baſis partes; alter ad partes uerticis: inſcripta erit in cono ſolida quædam figura, & altera circumſcripta ex cylindris æqualem altitudinem habentibus conſtans; quorum unuſquiſque, qui in figura inſcripta continetur æqualis eſt ei, qui ab eodem fit circulo in figura circũſcripta. Itaque cylindrus o p æqualis eſt cylindro o n; cylindrus r s cylĩdro r q; cylindrus u x cylindro u t eſt æqualis; & alii aliis ſimiliter. quare conſtat circũſcriptam figuram ſuperare inſcriptam cylindro, cuius baſis eſt circulus circa diametrum a c, & axis d e. atque hic eſt minor ſolida magnitudine propoſita.



PROBLEMA III. PROPOSITIO XII.

DATA coni portione, poteſt ſolida quædam figura inſcribi, & altera circumſcribi ex cylindri portionibus æqualem altitudinem habentibus; ita ut circumſcripta inſcriptam exuperet, magnitudine, quæ minor ſit ſolida magnitudine propoſita.

Figuram ciuſmodi, & inſcribemus, & circuſcribemus, ita ut in cono dictum eſt.

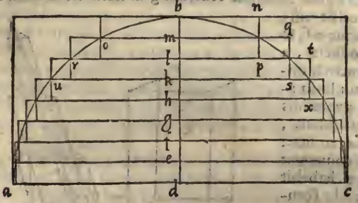


PROBLEMA IIII. PROPOSITIO XIII.

DATA ſphæræ portione, quæ dimidia ſphæra maior non ſit, poteſt ſolida quædam portio inſcribi & altera circumſcribi ex cylindris æqualem altitudinem habentibus, ita ut circumſcripta inſcriptam excedat magnitudine, quæ ſolida magnitudine propoſita ſit minor.

HOC etiam eodem prorſus modo fiet: atque ut ab Archimede traditum eſt in conoidum, & ſphæroidum portionibus, propoſitione uigeſimaprima libri de conoidibus, & ſphæroidibus.

THEO

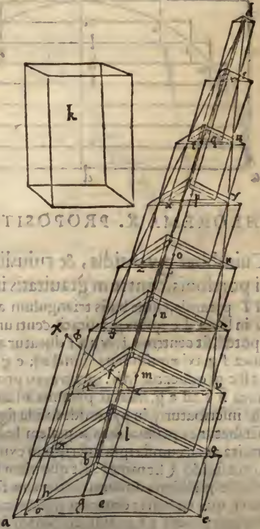


THEOREMA X. PROPOSITIO XIIII.

Cuiuslibet pyramidis, & cuiuslibet coni, uel coni portionis, centrum grauitatis in axe cõſiſtit.

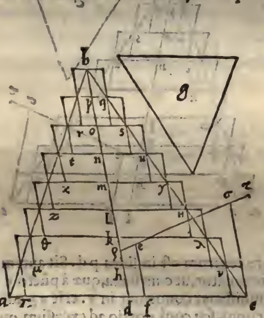
SIT pyramis, cuius baſis triangulum a b c; & axis d e. Dico in linea d e ipſius grauitatis centrum ineſſe. Si enim fieri poteſt, ſit centrum f: & ab f ducatur ad baſim pyramidis linea f g, axi æquidiſtans: iunctaq; e g ad latera trianguli a b c producatur in h. quam uero proportionem habet linea h e ad e g, habeat pyramis ad aliud ſolidum, in quo K: inſcribaturq; in pyramide ſolida figura, & altera circumſcribatur ex priſmatibus æqualem habentibus altitudinem, ita ut circumſcripta inſcriptam exuperet magnitudine, quæ ſolido k ſit minor. Et quoniam in pyramide planum baſi æquidiſtans ductum ſectionem facit figuram ſimilem ei, quæ eſt baſis; centrumq; grauitatis in axe habentem: erit priſmatis s t grauitatis centrũ in linea r q; priſmatis u x centrum in linea q p, priſmatis y z in linea p o; priſmatis η θ in linea o n; priſmatis λ μ in linea n m; priſmatis ν π in m l; & denique priſmatis ρ σ in l e. quare to-

tius figuræ inſcriptæ centrum grauitatis eſt in linea r e: quod ſit τ: iũctaque τ f, & producta, à puncto h ducatur linea axi pyramidis æquidiſtans, quæ cũ linea τ f conueniat in φ. habebit φ τ ad τ f eandem proportionem, quã h e ad e g. Quoniam igitur exceſſus, quo circũſcripta figura inſcriptam ſuperat, minor eſt ſolido κ; pyramis ad eundẽ exceſsũ maiorẽ proportionẽ habet, quàm ad κ ſolidum: uidelicet maiorem, quàm linea h e ad e g; hoc eſt quam φ τ ad τ f: & propterea multo maiorem habet ad partem exceſſus, quæ intra pyramidem comprehenditur. Itaque habeat



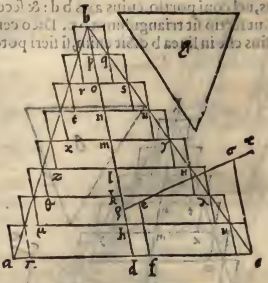
beat eam, quam $\chi\tau$ ad τ f. erit diuidendo ut χ f ad f τ, ita ſigura ſolida inſcripta ad partem exceſſus, quæ eſt intra pyramidem. Cum ergo à pyramide, cuius grauitatis cẽtrum eſt punctum f, ſolida figura inſcripta auferatur, cuius centrũ τ: reliquæ magnitudinis conſtantis ex parte exceſſus, quæ eſt intra pyramidem, centrum grauitatis erit in linea τ f producta, & in puncto χ: quod fieri non poteſt. Sequitur igitur, ut centrum grauitatis pyramidis in linea d e; hoc eſt in eius axe conſiſtat.

Sit conus, uel coni portio, cuius axis b d: & ſecetur plano per axem, ut ſectio ſit triangulum a b c. Dico centrum grauitatis ipſius eſſe in linea b d. Sit enim, ſi fieri poteſt, centrũ



e: perq; e ducatur e f axi æquidiſtans: & quam proportionem habet c d ad d f, habeat conus, uel coni portio ad ſolidum g. inſcribatur ergo in cono, uel coni portione ſoli

da figura, & altera circumſcribatur ex cylindris, uel cylindri portionibus; ſicuti dictum eſt, ita ut exceſſus, quo figura circumſcripta inſcriptam ſuperat, ſit ſolido g minor. Itaque centrum grauitatis cylindri, uel cylindri portionis q r eſt in linea p o; cylindri, uel cylindri portionis s t centrum in linea o n; centrum u x in linea n m; y z in m b; θ κ in l k; λ μ in K h; & denique ν π centrum in h d: ergo figu-



ræ inſcriptæ centrum eſt in linea p d. Sit autem ρ: & iuncta ρ c protendatur, ut cum linea, quæ à puncto c ducta fuerit axi æquidiſtans, conueniat in σ: erit σ ρ ad ρ c, ut c d ad d f: & conus, ſeu coni portio ad exceſſum, quo circumſcripta figura inſcriptam ſuperat, habebit maiorem proportionem, quàm σ ρ ad ρ c: ergo ad partem exceſſus, quæ intra ipſius ſuperficiem comprehenditur, multo maiorem proportionem habebit. habeat eam, quam τ ρ ad ρ c: erit

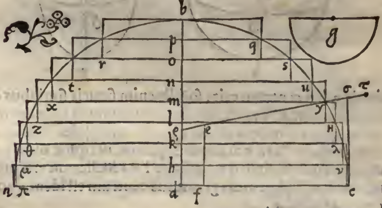
diuidendo

diuidendo figura ſolida inſcripta ad dictam exceſſus partem, ut τ e ad e ρ. & quoniam à cono, ſeu coni portione, cuius grauitatis centrum eſt e, aufertur figura inſcripta, cuius centrum ρ: reſiduæ magnitudinis compoſitæ ex parte exceſſus, quæ intra coni, uel coni portionis ſuperficiem continetur, centrum grauitatis erit in linea ρ e protracta, atque in puncto τ. quod eſt abſurdum. cõſtat ergo centrũ grauitatis coni, uel coni portionis, eſſe in axe b d: quod demonſtrandum propoſuimus.

THEOREMA XI. PROPOSITIO XV.

Cuiuslibet portionis ſphæræ uel ſphæroidis, quæ dimidia maior non ſit: itemq; cuiuslibet portionis conoidis, uel abſciſſæ plano ad axem recto, uel non recto, centrum grauitatis in axe conſiſtit.

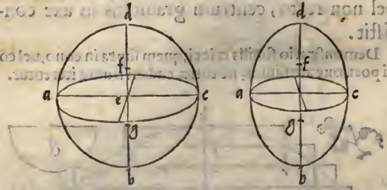
Demonſtratio ſimilis erit ei, quam ſupra in cono, uel coni portione attulimus, ne toties eadem fruſtra iterentur.



THEOREMA XII. PROPOSITIO XVI.

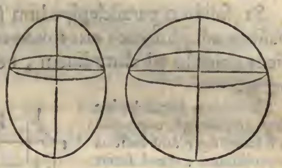
In ſphæra, & ſphæroide idem eſt grauitatis, & figuræ centrum.

Secetur ſphæra, uel ſphæroides plano per axem ducto; quod ſectionem faciat circulum, uel ellipſim a b c d, cuius diameter, & ſphæræ, uel ſphæroidis axis d b; & centrum e. Dico e grauitatis etiam centrum eſſe. ſecetur enim altero plano per e, ad planum ſecans recto, cuius ſectio ſit circulus circa diametrum a c. erunt a d c, a b c dimidiæ portiones ſphæræ, uel ſphæroidis. & quoniam portionis a d c grauitatis centrum eſt in linea d, & centrum portionis a b c in ipſa b e; totius ſphæræ, uel ſphæroidis grauitatis centrum in axe d b conſiſtet. Quòd ſi portionis a d c centrum grauitatis ponatur eſſe f, & fiat ipſi f e æqualis e g: punctũ g portionis a b c centrum erit. ſolidis enim figuris ſimilibus & æqualibus inter ſe aptatis, & centra grauitatis ipſarum inter ſe aptentur neceſſe eſt. ex quo fit, ut magnitudinis, quæ ex utriſque cõſtat, hoc eſt ipſius ſphæræ, uel ſphæroidis grauitatis centrum ſit in medio lineæ f g, uidelicet in e. Sphæræ igitur, uel ſphæroidis grauitatis centrum eſt idem, quod centrum figuræ.



per 2. petitionem 4 Archimedis.

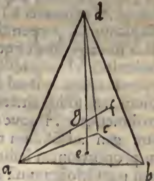
Ex demonſtratis perſpicue apparet, portioni ſphæræ uel ſphæroidis, quæ dimidia maior eſt, cẽtrum grauitatis in axe conſiſtere.



Data enim qualibet maiori portiõe, quoniã totius ſphæræ, uel ſphæroidis grauitatis centrum eſt in axe; eſt autem & in axe centrum portionis minoris: reliquæ portionis uidelicet maioris centrum in axe neceſſario conſiſtet.

THEOREMA XIII. PROPOSITIO XVII.

Cuiuslibet pyramidis triãgularem baſim habẽtis grauitatis centrum eſt in puncto, in quo ipſius axes conueniunt.

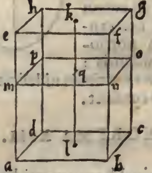


Sit pyramis, cuius baſis triangulum a b c, axis d e: ſitq; trianguli b d c grauitatis centrum f: & iungatur a f. erit & a f axis eiuſdem pyramidis ex tertia diffinitione huius. Itaque quoniam centrum grauitatis eſt in axe d e; eſt autem & in axe a f; quod proxime demonſtraui

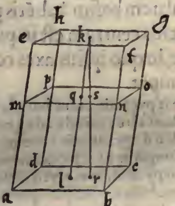
mus: erit utique grauitatis centrum pyramidis punctum g: in quo ſcilicet ipſi axes conueniunt.

THEOREMA XIIII. PROPOSITIO XVIII.

Si ſolidum parallelepipedum ſecetur plano baſibus æquidiſtante; erit ſolidum ad ſolidum, ſicut altitudo ad altitudinem, uel ſicut axis ad axem.



Sit ſolidum parallelepipedum a b c d e f g h, cuius axis k l: ſeceturq; plano baſibus æquidiſtante, quod faciat ſectionem m n o p; & axi in puncto q occurrat. Dico ſolidum g m ad ſolidum m c eam proportionem habere, quam altitudo ſolidi g m habet ad ſolidi m c altitudinem; uel quam axis k q ad axem q l. Si enim axis K l ad baſis planum ſit perpendicularis, & linea g c, quæ ex quinta huius ipſi k l æquidiſtat, perpendicularis erit ad idẽ planum, & ſolidi altitudinem dimetietur. Itaque ſolidum g m ad ſolidum m c eam proportionem habet, quam parallelogrammũ g n ad parallelogrammum n c, hoc eſt quam linea g o, quæ



25. undecimi.

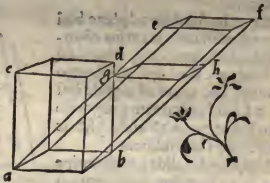
1. ſexti.

eſt ſolidi g m altitudo ad o e altitudinem ſolidi m c, uel quã axis k q ad q l axem. Si uero axis k l non ſit perpendicularis ad planum baſis; ducatur a puncto k ad idem planum perpendicularis k r, occurrẽs plano m n o p in s. ſimiliter demõſtrabimus ſolidum g m ad ſolidũ m c ita eſſe, ut axis k q ad axem q l. Sed ut K q ad q l, ita k s altitudo ad altitudinem s r; nam lineæ K l, K r à planis æquidiſtantibus in eaſdem proportiones ſecantur. ergo ſolidum g m ad ſolidum m c eandẽ proportionem habet, quam altitudo ad altitudinẽ, uel quam axis ad axem. quod demõſtrare oportebat. 17. undecimi

THEOREMA XV. PROPOSITIO XIX.

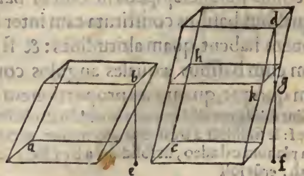
Solida parallelepipeda in eadem baſi, uel in æqualibus baſibus conſtituta eam inter ſe proportionem habent, quam altitudines: & ſi axes ipſorum cum baſibus æquales angulos contineant, eam quoque, quam axes proportionem habebũt.

Sint ſolida parallelepipeda in eadẽ baſi cõſtituta a b c d, a b e f: & ſit ſolidi a b c d altitudo minor: producatur autem planum c d adeo, ut ſolidum a b e f ſecet; cuius ſectio ſit g h: erũt ſolida a b c d, a b g h in eadem baſi, & æquali altitudine inter ſe æqualia. Quoniã igitur ſolidum a b e f ſecatur plano baſibus æquidiſtãte, erit ſolidum g h e f ad ipſum a b g h 29. undecimi 18. huius

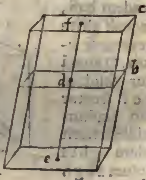


ut altitudo ad altitudinem: & componendo conuertendo
7.quinti. que ſolidum a b g h, hoc eſt ſolidum a b c d ipſi æquale, ad ſolidum a b e f, ut altitudo ſolidi a b c d ad ſolidi a b e f altitudinem.

Sint ſolida parallelepipeda a b, c d in æqualibus baſibus conſtituta ſitq; b e altitudo ſolidi a b: & ſolidi c d altitudo d f; quæ quidem maior ſit, quàm b e. Dico ſolidum a b ad ſolidum c d eandem habere proportionem, quam b e ad d f. abſcindatur enim à linea d f æqualis ipſi b e, quæ ſit g f: & per g ducatur planum ſecans ſolidum c d; quod baſibus
31. undecimi æquidiſtet, faciatq; ſectionē h k. erunt ſolida a b, c k æque alta inter ſe æqualia cũ æquales baſes habeant.
18.huius Sed ſolidũ h d ad ſolidum c k eſt, ut altitudo d g ad g f altitudinē; ſecatur enim ſolidum c d plano baſibus æquidiſtante: & rurſus cõponendo, conuertendoq; ſolidũ c k
7.quinti. ad ſolidum c d, ut g f ad f d. ergo ſolidum a b, quod eſt æquale ipſi c k ad ſolidum c d eam proportionem habet, quam altitudo g f, hoc eſt b e ad d f altitudinem.

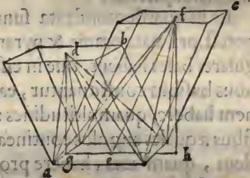


Sint deinde ſolida parallelepipeda a b, a c in eadem baſi; quorum axes d e, f e cum ipſa æquales angu-

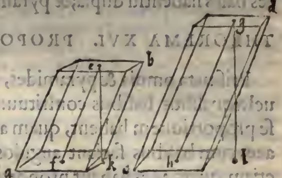


los

los contineant. Dico ſolidum a b ad ſolidum a c eãdem habere proportionem, quam axis d e ad axem e f. Si enim axes in eadem recta linea fuerint conſtituti, hæc duo ſolida, in unum, atque idem ſolidum conuenient. quare ex iis, quæ proxime tradita ſunt, habebit ſolidum a b ad ſolidum a c eandem proportionem, quam axis d e ad e f axem. Si uero axes non ſint in eadem recta linea, demittantur a punctis d, f perpendiculares ad baſis planum, d g, f h: & iungantur e g, e h. Quoniam igitur axes cum baſibus æquales angulos continent, erit d e g angulus æqualis angulo f e h: & ſunt anguli ad g h recti, quare & reliquus e d g æqualis erit reliquo e f h: & triangulum d e g triãgulo f e h ſimile. ergo g d ad d e eſt, ut h f ad f e: & permutando g d ad h f, ut d e ad e f. Sed ſolidum a b ad ſolidum a c eandem proportionem habet, quam d g altitudo ad altitudinẽ f h. ergo & eandẽ habebit, quã axis d e ad e f axẽ.



Poſtremo ſint ſolida parallelepipeda a b, c d in



æqualibus baſibus, quorum axes cum baſibus æquales angulos faciant. Dico ſolidum a b ad ſolidũ c d ita eſſe, ut axis e f ad axem g h: nam ſi axes ad planum baſis recti ſint, illud perſpicue conſtat: quoniam eadem linea, & axem & ſolidi altitudinem determinabit. Si uero ſint inclinati, à punctis e g ad ſubiectum planum perpendiculares ducantur e k, g l: & iungantur f k, h l. rurſus quoniam axes cum baſibus æquales faciunt angulos, eodem modo demonſtrabitur, triangulum e f K triangulo g h l ſimile eſſe: & e k ad g l, ut e f ad g h. Solidum autem a b ad ſolidum c d eſt, ut e K ad g l. ergo & ut axis e f ad axem g h. quæ omnia demonſtrare oportebat.

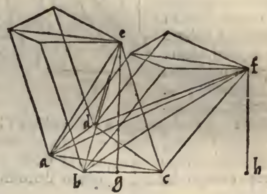
Ex iis quæ demonſtrata ſunt, facile conſtare poteſt, priſmata omnia & pyramides, quæ triangulares baſes habent, ſiue in eiſdem, ſiue in æqua
15. quinti libus baſibus conſtituantur, eandem proportionem habere, quam altitudines: & ſi axes cum baſibus æquales angulos contineant, ſimiliter eandem, quam axes, habere proportionem: ſunt
28. undecimi. enim ſolida parallelepipeda priſmatum triangula
7. duodecimi. res baſes habentiũ dupla; & pyramidum ſextupla.

THEOREMA XVI. PROPOSITIO XX.

Priſmata omnia & pyramides, quæ in eiſdem, uel æqualibus baſibus conſtituuntur, eam inter ſe proportionem habent, quam altitudines: & ſi axes cum baſibus faciant angulos æquales, eam etiam, quam axes habent proportionem.

Sint

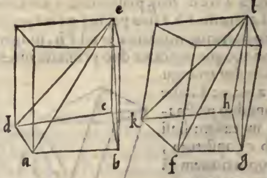
Sint duo priſmata a e, a f, quorum eadem baſis quadrilatera a b c d: ſitq; priſmatis a e altitudo e g; & priſmatis a f altitudo f h. Dico priſma a e ad priſma a f eam habere proportionem, quam e g ad f h. iungatur enim a c: & in unoquoque priſmate duo priſmata intelligantur, quorum baſes ſint triangula a b c, a c d. habebunt duo priſmate in eadem baſi a b c conſtituta, proportionem eãdem, quam ipſorum altitudines e g, f h, ex iam demonſtratis. & ſimiliter alia duo, quæ ſunt in baſi a



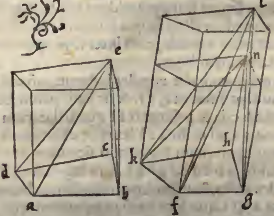
c d. quare totum priſma a e ad priſma a f eandem proportionem habebit, quam altitudo e g ad f h altitudinem. 12. quinti
Quòd cum priſmata ſint pyramidum tripla, & ipſæ pyramides, quarum eadem eſt baſis quadrilatera, & altitudo priſmatum altitudini æqualis, eam inter ſe proportionem habebunt, quam altitudines.

Si uero priſmata baſes æquales habeant, nõ eaſdem, ſint duo eiuſmodi priſmata a e, f l: & ſit baſis priſmatis a e quadrilaterum a b c d; & priſmatis f l quadrilaterum f g h k. Dico priſma a e ad priſma f l ita eſſe, ut altitudo illius ad huius altitudinem. nam ſi altitudo ſit eadem, intelligãtur duæ pyramides a b c d e, f g h k l. quæ ĩter ſe æquales erũt, cum æquales baſes, & altitudinem eandem habeant. quare & priſmata a e, f l, quæ ſunt harũ pyramidum tripla, æqualia ſint neceſſe eſt. ex quibus perſpicue conſtat propoſitũ. Si uero altitudo priſmatis f l ſit maior, à priſmate f l abſcindatur priſma f m, quod æque altum ſit, atq; ipſum a e. 6. duodecimi 15. quinti

erunt eadem ratione priſmata a e, f m inter ſe æqualia. quare ſimiliter demonſtrabitur priſma f m ad priſma f l eandem habere proportionem, quam priſmatis f m altitudo ad altitudinem ipſius f l.

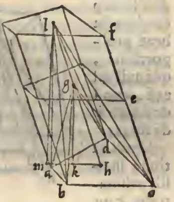


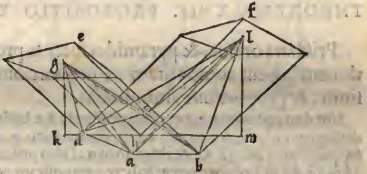
ergo & priſma a e ad priſma f l eandem proportionem habebit, quam altitudo ad altitudinem. ſequitur igitur ut & pyramides, quæ in æqualibus baſibus conſtituū tur, eandem inter ſe ſe, quam altitudines, proportionem habeant.



Sint deinde priſmata a e, a f in eadem baſi a b c d; quorū axes cum baſibus æquales angulos contineant: & ſit priſmatis

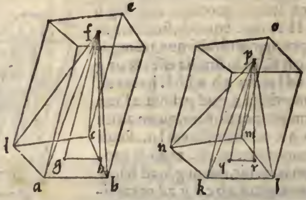
matis a e axis g h; & priſmatis a f axis l h. Dico priſma a e ad priſma a f eam proportionem habere, quam g h ad h l. ducantur à punctis g l perpendiculares ad baſis planum g K, l m: & iungantur k h, h m. Itaque quoniam anguli g h k, l h m ſunt æquales, ſimiliter ut ſupra demonſtrabimus, triangula g h K, l h m ſimilia eſſe; & ut g K ad l m, ita g h ad h l. habet autem priſma a e ad priſma a f eandem proportionem, quam altitudo g K ad altitudinem l m, ſicuti demonſtratum eſt. ergo & eandem habebit, quam g h, ad h l. pyramis igitur a b c d g ad pyramidem a b c d l eandem proportionem habebit, quam axis g h ad h l axem.





Denique ſint priſmata a e, k o in æqualibus baſibus a b c d, k l m n conſtituta; quorum axes cum baſibus æquales faciant angulos: ſitq; priſmatis a e axis f g, & altitudo f h: priſmatis autem k o axis p q, & altitudo p r. Dico priſma a e ad priſma k o ita eſſe, ut f g ad p q. iunctis enim g h,

q r, eodem, quo ſupra, modo oſtendemus f g ad p q, ut f h ad p r. ſed priſma a e ad ipſum κ o eſt, ut f h ad p r. ergo & ut f g axis ad axem p q. ex quibus fit, ut pyramis a b c d f ad pyramidē κ l m n p eandem habeat proportionē, quā axis ad axē. quod demonſtrādū fuerat.



Simili ratione in aliis priſmatibus & pyramidibus eadem demonſtrabuntur.

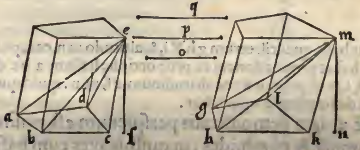
THEOREMA XVII. PROPOSITIO XXI.

Priſmata omnia, & pyramides inter ſe proportionem habent compoſitam ex proportione baſium, & proportione altitudinum.

Sint duo priſmata a e, g m: ſitq; priſmatis a e baſis quadrilaterum a b c d, & altitudo e f: priſmatis uero g m baſis quadrilaterum g h K l, & altitudo m n. Dico priſma a e ad priſma g m proportionem habere compoſitam ex proportione baſis a b c d ad baſim g h k l, & ex proportione altitudinis e f, ad altitudinem m n.

Sint enim primum e f, m n æquales: & ut baſis a b c d ad baſim g h κ l, ita fiat linea, in qua o ad lineam, in qua p: ut autem e f ad m n, ita linea p ad lineam q. erunt lineæ p q inter ſe æquales. Itaque priſma a e ad priſma g m eā pro

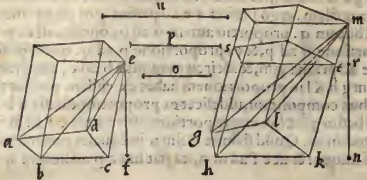
proportionem habet, quam baſis a b c d ad baſim g h κ l: ſi enim intelligantur duæ pyramides a b c d e, g h k l m, habebunt hæ inter ſe proportionem eandem, quam ipſarum baſes ex ſexta duodecimi elementorum. Sed ut baſis a b c d ad g h K l baſim, ita linea o ad lineam p; hoc eſt ad lineam q ei æqualem. ergo priſma a e ad priſma g m eſt, ut linea o ad lineam q. proportio autem o ad q cõpoſita eſt ex proportione o ad p, & ex proportione p ad q. quare priſma a e ad priſma g m, & idcirco pyramis a b c d e, ad pyramidem g h K l m proportionem habet ex eiſdem proportionibus compoſitam, uidelicet ex proportione baſis a b c d ad baſim g h κ l, & ex proportione altitudinis e f ad m n altitudinem. Quòd ſi lineæ e f, m n inæquales ponantur, ſit e f minor: & ut e f ad m n, ita fiat linea p ad lineam u: de



inde ab ipſa m n abſcindatur r n æqualis e f: & per r ducatur planum, quod oppoſitis planis æquidiſtans faciat ſectionem s t. erit priſma a e, ad priſma g t, ut baſis a b c d ad baſim g h k l; hoc eſt ut o ad p: ut autem priſma g t ad priſma g m, ita altitudo r n; hoc eſt e f ad altitudinẽ m n; uidelicet linea p ad lineam u. ergo ex æquali priſma a e ad priſma g m eſt, ut linea o ad ipſam u. Sed proportio o ad u cõpoſita eſt ex proportione o ad p, quæ eſt baſis a b c d ad baſim g h κ l; & ex proportione p ad u, quæ eſt altitudinis e f ad altitudinem m n. priſma igitur a e ad priſma g m

20. huius

compoſitam proportionem habet ex proportione baſiũ, & proportione altitudinum. Quare & pyramis, cuius baſis eſt quadrilaterum a b c d,& altitudo e f ad pyramidem,



cuius baſis quadrilaterum g h K l,& altitudo m n,compoſitam habet proportionem ex proportione baſium a b c d, g h k l,& ex proportione altitudinum e f, m n. quod quidem demonſtraſſe oportebat.

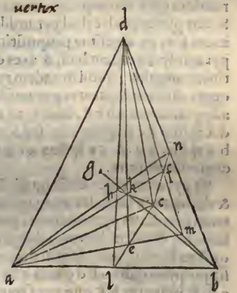
Ex iam demonſtratis perſpicuum eſt,priſmata omnia,& pyramides, in quibus axes cum baſibus æquales angulos continent, proportionem habere compoſitam ex baſium proportione, & proportione axium. demonſttatum eſt enim, axes inter ſe eandem proportionem habere, quam ipſæ altitudines.

THEOREMA XVIII. PROPOSITIO XXII.

CVIVSLIBET pyramidis,& cuiuslibet coni, uel

uel coni portionis axis à centro grauitatis ita diui-
ditur, ut pars, quæ terminatur ad uerticem reli-
quæ partis, quæ ad baſim, ſit tripla.

Sit pyramis, cuius baſis triangulum a b c; axis d e; & gra
uitatis centrum K. Dico lineam d k ipſius K e triplam eſſe.
trianguli enim b d c centrum grauitatis ſit punctum f; triã
guli a d c centrũ g; & trianguli a d b ſit h: & iungantur a f,
b g, c h. Quoniam igitur centrũ grauitatis pyramidis in axe
cõſiſtit: ſuntq; d e, a f, b g, c h eiuſdẽ pyramidis axes: conue 17.huius
niunt omnes in idẽ punctũ k, quod eſt grauitatis centrum.
Itaque animo concipiamus hanc pyramidem diuiſam in
quatuor pyramides, quarum baſes ſint ipſa pyramidis
triangula; & axis pun-
ctum k quæ quidem py-
ramides inter ſe æquales
ſunt, ut demõſtrabitur.
Ducatur enĩ per lineas
d c, d e planum ſecãs, ut
ſit ipſius, & baſis a b c cõ
munis ſectio recta linea
c e l: eiuſdẽ uero & triã-
guli a d b ſit linea d h l.
erit linea a l æqualis ipſi
l b: nam centrum graui-
tatis trianguli conſiſtit
in linea, quæ ab angulo
ad dimidiam baſim per-
ducitur, ex tertia deci-
ma Archimedis. quare 1. ſexti.
triangulum a c l æquale



eſt triangulo b c l: & propterea pyramis, cuius baſis trian-
gulum a c l, uertex d, eſt æqualis pyramidi, cuius baſis b c l 5.duode-
triangulum, & idem uertex. pyramides enim, quæ ab eodẽ cimi.

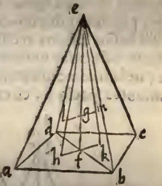
ſunt uertice, eandem proportionem habent, quam ipſarũ baſes. eadem ratione pyramis a c l k pyramidi b c l k: & pyramis a d l k ipſi b d l k pyramidi æqualis erit. Itaque ſi à pyramide a c l d auſerantur pyramides a c l k, a d l k: & à pyramide b c l d auſerãtur pyramides b c l k, d b l K: quæ relinquuntur erunt æqualia. æqualis igitur eſt pyramis a c d k pyramidi b c d K. Rurſus ſi per lineas a d, d e ducatur planum quod pyramidem ſecet: ſitq; eius & baſis communis ſectio a e m: ſimiliter oſtendetur pyramis a b d K æqualis pyramidi a c d k. ducto denique alio plano per lineas c a, a f: ut eius, & trianguli c d b communis ſectio ſit c f n, pyramis a b c k pyramidi a c d k æqualis demonſtrabitur. cũ ergo tres pyramides b c d k, a b d k, a b c k uni, & eidem pyramidi a c d k ſint æquales, omnes inter ſe ſe æquales erũt. Sed ut pyramis a b c d ad pyramidem a b c K, ita d e axis ad axem K e, ex uigeſima propoſitione huius: ſunt enim hæ pyramides in eadem baſi, & axes cum baſibus æquales continent angulos, quòd in eadem recta linea conſtituantur. quare diuidendo, ut tres pyramides a c d k, b c d K, a b d K ad pyramidem a b c K, ita d k ad K e. conſtat igitur lineam d K ipſius K e triplam eſſe. ſed & a K tripla eſt K f: itemque b K ipſius K g: & c K ipſius K l tripla. quod eodem modo demonſtrabimus.

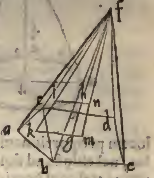
Sit pyramis, cuius baſis quadrilaterum a b c d; axis e f: & diuidatur e f in g, ita ut e g ipſius g f ſit tripla. Dico centrum grauitatis pyramidis eſſe punctum g. ducatur enim linea b d diuidens baſim in duo triangula a b d, b c d: ex quibus intelligãtur cõſtitui duæ pyramides a b d e, b c d e: ſitque pyramidis a b d e axis e h; & pyramidis b c d e axis e K: & iungatur h K, quæ per f tranſibit: eſt enim in ipſa h K centrum grauitatis magnitudinis compoſitæ ex triangulis a b d, b c d, hoc eſt ipſius quadrilateri. Itaque centrum grauitatis pyramidis a b d e ſit punctum l: & pyramidis b c d e

2.ſexti: ſit m. ducta igitur l m ipſi h m lineæ æquidiſtabit: nam e l ad

l h

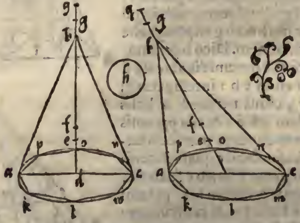
l h eandem habet proportionem, quam e m ad m k, uidelicet triplam. quare linea l m ipſam e f ſecabit in puncto g: etenim e g ad g f eſt, ut e l ad l h. præterea quoniam h k, l m æquidiſtant, erunt triangula h e f, l e g ſimilia: itemq; inter ſe ſimilia f e κ, g e m: & ut e f ad e g, ita h f ad l g: & ita f κ ad g m. ergo ut h f ad l g, ita f κ ad g m: & permutando ut h f ad f κ, ita l g ad g m. ſed cum h ſit centrum trianguli a b d; & κ triãguli b c d: punctũ uero f totius quadrilateri a b c d centrum: erit ex 8. Archimedis de centro grauitatis planorum h f ad f κ, ut triangulum b c d ad triangulum a b d: ut autem b c d triangulum ad triangulum a b d, ita pyramis b c d e ad pyramidem a b d e. ergo linea l g ad g m erit, ut pyramis b c d e ad pyramidẽ a b d e. ex quo ſequitur, ut totius pyramidis a b c d e punctum g ſit grauitatis centrum. Rurſus ſit pyramis baſim habens pentagonum a b c d e: & axem f g: diuidaturq; axis in puncto h, ita ut f h ad h g triplam habeat proportionem. Dico h grauitatis centrũ eſſe pyramidis a b c d e f. iungatur enim e b: intelligaturq; pyramis, cuius uertex f, & baſis triangulum a b e: & alia pyramis intelligatur eundem uerticem habens, & baſim b c d e quadrilaterũ: ſit autem pyramidis a b e f axis f κ, & grauitatis centrum l: & pyramidis b c d e f axis f m, & centrum grauitatis n: iunganturq; κ m, l n; quæ per puncta g h tranſibunt. Rurſus eodem modo, quo ſupra, demonſtrabimus lineas κ g m, l h n ſibi ipſis æquidiſtare:





& deniq; punctum h pyramidis a b c d e f grauitatis eſſe centrum, & ita in aliis.

Sit conus, uel coni portio axem habens b d: ſeceturque plano per axem, quod ſectionem faciat triangulum a b c: & b d axis diuidatur in e, ita ut b e ipſius e d ſit tripla. Dico punctum e coni, uel coni portionis, grauitatis eſſe centrum. Si enim fieri poteſt, ſit centrum f: & producatur e f extra figuram in g. quam uero proportionem habet g e ad e f, habeat baſis coni, uel coni portionis, hoc eſt circulus, uel ellipſis circa diametrum a c ad aliud ſpacium, in quo h. Itaque in circulo, uel ellipſi plane deſcribatur rectilinea figura a k l m c n o p, ita ut quæ relinquũtur portiones ſint minores ſpacio h: & intelligatur pyramis baſim habens rectilineam figuram a K l m c n o p, & axem b d; cuius quidem grauitatis centrum erit punctum e, ut iam demonſtrauimus. Et quoniam portiones ſunt minores ſpacio h, circulus, uel ellipſis ad portiones ma-



iorem proportionem habet, quam g e ad e f. ſed ut circulus, uel ellipſis ad figuram rectilineam ſibi inſcriptam, ita conus, uel coni portio ad pyramidem, quæ figuram rectilineam pro baſi habet; & altitudinem æqualem: etenim ſupra

pra demonſtratum eſt, ita eſſe cylindrum, uel cylindri portionem ad priſma, cuius baſis rectilinea figura, & æqualis altitudo. ergo per conuerſionem rationis, ut circulus, uel ellipſis ad portiones, ita conus, uel coni portio ad portiones ſolidas. quare conus uel coni portio ad portiones ſolidas maiorem habet proportionem, quam g e ad e f: & diuidendo, pyramis ad portiones ſolidas maiorem proportionem habet, quam g f ad f e. fiat igitur q f ad f e ut pyramis ad dictas portiones. Itaque quoniam à cono uel coni portione, cuius grauitatis centrum eſt f, aufertur pyramis, cuius centrum e; reliquæ magnitudinis, quæ ex ſolidis portionibus conſtat, centrum grauitatis erit in linea e f protracta, & in puncto q. quod fieri non poteſt: eſt enim centrum grauitatis intra. Conſtat igitur coni, uel coni portionis grauitatis centrum eſſe punctum e. quæ omnia demonſtrare oportebat. 8 huius

THEOREMA XIX. PROPOSITIO XXIII.

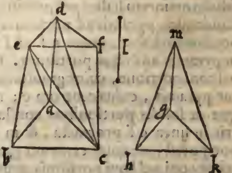
QVODLIBET fruſtum à pyramide, quæ triangularem baſim habeat, abſciſſum, diuiditur in tres pyramides proportionales, in ea proportione, quæ eſt lateris maioris baſis ad latus minoris ipſi reſpondens.

Hoc demonſtrauit Leonardus Piſanus in libro, qui de praxi geometriæ inſcribitur. Sed quoniam is adhuc impreſſus non eſt, nos ipſius demonſtrationem breuiter perſtringemus, rem ipſam ſecuti, non uerba. Sit fruſtum pyramidis a b c d e f, cuius maior baſis triangulum a b c, minor d e f: & iunctis a e, e c, c d, per lineas a e, e c ducatur planum ſecans fruſtum: itemque per lineas e c, c d; & per c d, d a alia plana ducantur, quæ diuident fruſtum in tres pyramides a b c e, a d c e, d e f c.

Dico eas proportionales eſſe in proportione, quæ eſt lateris a b ad latus d e, ita ut earum maior ſit a b c e, media a d c e, & minor d e f c. Quoniam enim lineæ d e, a b æquidiſtant; & inter ipſas ſunt triangula a b e, a d e;

1.ſexti. erit triangulum a b e ad triangulum a d e, ut linea a b ad lineam d e. ut autem triangulum a b e ad triangulum a d e, ita pyramis

5.duodecimi. a b e c ad pyramidem a d e c: habent enim altitudinem eandem, quæ eſt à puncto c ad planum, in quo quadrilaterum a b e d. er-



11.quinti. go ut a b ad d e, ita pyramis a b e c ad pyramidem a d e c. Rurſus quoniam æquidiſtantes ſunt a c, d f; erit eadem

4 ſexti. ratione pyramis a d c e ad pyramidem c d f e, ut a c ad d f. Sed ut a c ad d f, ita a b ad d e, quoniam triangula a b c, d e f ſimilia ſunt, ex nona huius. quare ut pyramis a b c e ad pyramidem a d c e, ita pyramis a d c e ad ipſam d e f c. fruſtum igitur a b c d e f diuiditur in tres pyramides proportionales in ea proportione, quæ eſt lateris a b ad d e latus, & earum maior eſt c a b e, media a d c e, & minor d e f c. quod demonſtrare oportebat.

PROBLEMA V. PROPOSITIO XXIIII.

QVODLIBET fruſtum pyramidis, uel coni, uel coni portionis, plano baſi æquidiſtanti ita ſecare, ut ſectio ſit proportionalis inter maiorem, & minorem baſim.

Sit

SIT fruſtum pyramidis a e, cuius maior baſis triangulum a b c, minor d e f: & oporteat ipſum plano, quod baſi æquidiſtet, ita ſecare, ut ſectio ſit proportionalis inter triã gula a b c, d e f. Inueniatur inter lineas a b, d e media proportionalis, quæ ſit b g: & à puncto g erigatur g h æquidiſtans b e, ſecansq; a d in h: deinde per h ducatur planum baſibus æquidiſtans, cuius ſectio ſit triangulum h k l. Dico triangulum h K l proportionale eſſe inter triangula a b c, d e f; hoc eſt triangulum a b c ad triangulum h K l eandem habere proportionem, quam triãgulum h K l ad ipſum d e f. Quoniã enim lineæ a b, h K æquidiſtantium planorum ſectiones inter ſe æquidiſtant: atque æquidiſtant b k, g h: linea h k ipſi g b eſt æqualis: & propterea proportionalis inter a b, d e. quare ut a b ad h K, ita eſt h k ad d e. fiat ut h k ad d e, ita d e ad aliam lineam, in qua ſit m. erit ex æquali ut a b ad d e, ita h k ad m. Et quoniam triangula a b c, h K l, d e f ſimilia ſunt; triangulũ a b c ad triangulum h k l eſt, ut linea a b ad lineam d e: triangulũ autem h k l ad ipſum d e f eſt, ut h k ad m. ergo triangulum a b c ad triangulum h k l eandem proportionem habet, quam triangulum h K l ad ipſum d e f. Eodem modo in aliis fruſtis pyramidis idem demonſtrabitur.

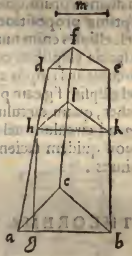
16. undecimi

34. primi

9 huius corol.

20. ſexti

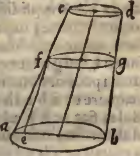
11. quinti



Sit fruſtum coni, uel coni portionis a d: & ſecetur plano per axem, cuius ſectio ſit a b c d, ita ut maior ipſius baſis ſit circulus, uel ellipſis circa diametrum a b; minor circa c d. Rurſus inter lineas a b, c d inueniatur proportionalis b e: & ab e ducta e f æquidiſtante b d, quæ lineam c a in f ſecet,

per f planum baſibus æquidiſtans ducatur, ut ſit ſectio circulus, uel ellipſis circa diametrum f g. Dico ſectionem a b ad ſectionem f g eandem proportionem habere, quam f g ad ipſam c d. Simili enim ratione, qua ſupra, demonſtrabitur quadratum a b ad quadratum f g ita eſſe, ut quadratũ f g ad c d quadratum. Sed circuli inter ſe eandem proportionem habent, quam diametrorum quadrata. ellipſes autem circa a b, f g, c d, quæ ſimiles ſunt, ut oſtendimus in cõmentariis in principium libri Archimedis de conoidibus, & ſphæroidibus, eam habẽt proportionem, quam quadrata diametrorum, quæ eiuſdem rationis ſunt, ex corollaio ſeptimæ propoſitionis eiuſdem libri. ellipſes enim nunc appello ipſa ſpacia ellipſibus contenta. ergo circulus, uel ellipſis a b ad circulũ, uel ellipſim f g eam proportionem habet, quam circulus, uel ellipſis f g ad circulum uel ellipſim c d, quod quidem faciendum propoſuimus.

2. duodecimi

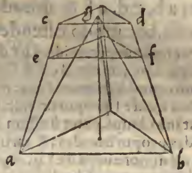


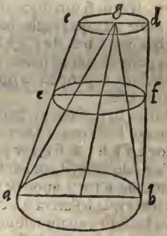
THEOREMA XX. PROPOSITIO XXV.

QVODLIBET fruſtum pyramidis, uel coni, uel coni portionis ad pyramidem, uel conum, uel coni portionem, cuius baſis eadem eſt, & æqualis altitudo, eandem proportionẽ habet, quam utræque baſes, maior, & minor ſimul ſumptæ vnà cũ ea, quæ inter ipſas ſit proportionalis, ad baſim maiorem.

Sit

SIT fruſtũ pyramidis,uel coni, uel coni portionis a d, cuius maior baſis a b, minor c d. & ſecetur altero plano baſi æquidiſtante, ita ut ſectio e f ſit proportionalis inter baſes a b,c d.conſtituatur autẽ pyramis,uel conus, uel coni portio a g b,cuius baſis ſit eadem, quæ baſis maior fruſti,& altitudo æqualis. Dico fruſtum a d ad pyramidem, uel conum, uel coni portionem a g b eandem proportionẽ habere, quã utræque baſes, a b, c d unà cum e f ad baſim a b. eſt enim fruſtum a d æquale pyramidi,uel cono,uel coni portioni, cuius baſis ex tribus baſibus a b, e f, c d conſtat; & altitudo ipſius altitudini eſt æqualis: quod mox oſtendemus. Sed pyramides, coni, uel coni portiões, quæ ſunt æquali altitudine, cãdem inter ſe, quam baſes, proportionem habent, ſicuti demonſtratum eſt, partim ab Euclide in duodecimo libro elementorum, partim à nobis in cõmentariis in undecimam propoſitionẽ Archimedis de conoidibus, & ſphæroidibus. quare pyramis,uel conus,uel coni portio,cuius baſis eſt tribus illis baſibus æqualis ad a g b eam habet proportionem, quam baſes a b,e f,c d ad a b baſim. Fruſtum igitur a d ad a g b



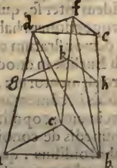


6.11.duodecimi

pyramidem, uel conum, uel coni portionem eandem proportionem habet, quam baſes a b, c d unà cum e f ad baſim a b. quod demonſtrare uolebamus.

Fruſtum uero a d æquale eſſe pyramidi, uel cono, uel coni portioni, cuius baſis conſtat ex baſibus a b, c d, e f, & altitudo fruſti altitudini eſt æqualis, hoc modo oſtendemus.

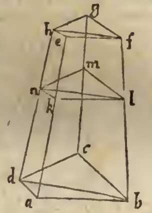
Sit fruſtum pyramidis a b c d e f, cuius maior baſis triangulum a b c; minor d e f: & ſecetur plano baſibus æquidiſtante, quod ſectionem faciat triangulum g h k inter triangula a b c, d e f proportionale. Iam ex iis, quæ demonſtrata ſunt in 23. huius, patet fruſtum a b c d e f diuidi in tres pyramides proportionales; & earum maiorem eſſe pyramidē a b c d minorē uero d e f b. ergo pyramis à triangulo g h k conſtituta, quæ altitudinem habeat fruſti altitudini æqualem, proportionalis eſt inter pyramides a b c d, d e f b: & idcirco fruſtum a b c d e f tribus dictis pyramidibus æquale erit. Itaque ſi intelligatur alia pyramis æque alta, quæ baſim habeat ex tribus baſibus a b c, d e f, g h k conſtantem; perſpicuum eſt ipſam eiſdem pyramidibus, & propterea ipſi fruſto æqualem eſſe.



Rurſus ſit fruſtum pyramidis a g, cuius maior baſis quadrilaterum a b c d, minor e f g h; & ſecetur plano baſibus æquidiſtante, ita ut fiat ſectio quadrilaterum K l m n, quod ſit proportionale inter quadrilatera a b c d, e f g h. Dico pyramidem, cuius baſis ſit æqualis tribus quadrilateris a b c d, k l m n, e f g h, & altitudo æqualis altitudini fruſti, ipſi fruſto a g æqualem eſſe. Ducatur enim planum per lineas f b, h d,

quod

quod diuidat fruſtum in duo fruſta triangulares baſes habentia, uidelicet in fruſtum a b d e f h, & in fruſtũ b c d f g h. erit triangulum k l n proportionale inter triangula a b d, e f h: & triangulum l m n proportionale inter b c d, f g h. ſed pyramis æque alta, cuius baſis conſtat ex tribus triangulis a b d, k l n, e f h, demonſtrata eſt fruſto a b d e f h æqualis: & ſimiliter pyramis, cuius baſis conſtat ex triangulis b c d, l m n, f g h æqualis fruſto b c d f g h: componuntur autem tria quadrilatera a b c d, k l m n, e f g h e ſex triangulis iam dictis. pyramis igitur baſim habens æqualem tribus quadrilateris, & altitudinem eandem ipſi fruſto a g eſt æqualis. Eodem modo illud demõſtrabitur in aliis eiuſmodi fruſtis.



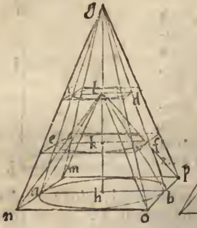
Sit fruſtum coni, uel coni portionis a d; cuius maior baſis circulus, uel ellipſis circa diametrum a b; minor circa c d: & ſecetur plano, quod baſibus æquidiſtet, faciatq; ſectionem circulum, uel ellipſim circa diametrum e f, ita ut inter circulos, uel ellipſes a b, c d ſit proportionalis. Dico conum, uel coni portionem, cuius baſis eſt æqualis tribus circulis, uel tribus ellipſibus a b, e f, c d; & altitudo eadem, quæ fruſti a d, ipſi fruſto æqualem eſſe. producatur enim fruſti ſuperficies quouſque coeat in unum punctum, quod ſit g: & coni, uel coni portionis a g b axis ſit g h, occurrens planis a b, e f, c d in punctis h k l: circa circulum uero deſcribatur quadratum m n o p, & circa ellipſim rectangulũ m n o p, quod ex ipſius diametris conſtat: iunctisq; g m, g n, g o, g p, ex eodem uertice intelligatur pyramis baſim habens dictum quadratum, uel rectangulum: & plana in quibus ſunt circuli, uel ellipſes e f, c d uſque ad eius latera

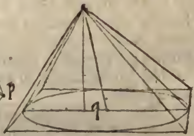
producantur. Quoniam igitur pyramis ſecatur planis baſi æquidiſtantibus, ſectiones ſimiles erunt: atque erunt quadrata, uel rectangula circa circulos, uel ellipſes deſcripta, quemadmodum & in ipſa baſi. Sed cum circuli inter ſe eã proportionem habeant, quam diametrorum quadrata: itemq; ellipſes eam quam rectangula ex ipſarum diametris conſtantia: & ſit circulus, uel ellipſis circa diametrum e f

9 huius

2. duodecimi.

7. de conoidibus & ſphæroidibus





proportionalis inter circulos, uel ellipſes a b, c d; erit rectangulum e f etiam inter rectangula a b, c d proportionale: per rectangulum enim nunc breuitatis cauſa etiã ipſum quadratum intelligemus. quare ex iis, quæ proxime dicta ſunt, pyramis baſim habens æqualem dictis rectangulis, & altitudinem eandem, quam fruſtum a d, ipſi fruſto à pyramide abſciſſo æqualis probabitur. ut autem rectangulum c d ad rectangulũ e f, ita circulus, uel ellipſis c d ad e f circulum, uel ellipſim: componendoq; ut rectangula c d, e f, ad e f rectangulum, ita circuli, uel ellipſes c d, e f, ad e f: & ut rectangulum e f ad rectangulum a b, ita circulus, uel ellipſis e f ad a b circulum, uel ellipſim. ergo ex æquali, & componendo, ut rectãgula c d, e f, a b ad ipſum a b, ita circuli,

coli,uel ellipſes c d,e f a b ad circulum,uel ellipſim a b. Intelligatur pyramis q baſim habens æqualem tribus rectangulis a b,e f,c d; & altitudinem eãdem,quam fruſtum a d. intelligatur etiam conus,uel coni portio q,eadem altitudine,cuius baſis ſit tribus circulis, uel tribus ellipſibus a b, e f,c d æqualis. poſtremo intelligatur pyramis a l b, cuius baſis ſit rectangulum m n o p, & altitudo eadem, quæ fruſti: itemq; intelligatur conus, uel coni portio a l b, cuius baſis circulus,uel ellipſis circa diametrum a b,& eadem altitudo. ut igitur rectangula a b,e f,c d ad rectangulum a b, ita pyramis q ad pyramidem a l b; & ut circuli, uel ellipſes a b,e f,c d ad a b circulum,uel ellipſim,ita conus,uel coni portio q ad conum, uel coni portionem a l b. conus igitur, uel coni portio q ad conum, uel coni portionem a l b eſt, ut pyramis q ad pyramidem a l b. ſed pyramis a l b ad pyramidem a g b eſt, ut altitudo ad altitudinem,ex 20. huius: & ita eſt conus,uel coni portio a l b ad conum, uel coni portionem a g b ex 14. duodecimi elementorum, & ex iis,quæ nos demonſtrauimus in commentariis in undecimam de conoidibus, & ſphæroidibus, propoſitione quarta. pyramis autem a g b ad pyramidem c g d proportionem habet compoſitam ex proportione baſium & proportione altitudinum,ex uigeſima prima huius: & ſimiliter conus,uel coni portio a g b ad conum,uel coni portionem c g d proportionem habet compoſitã ex eiſdem proportionibus, per ea, quæ in dictis commentariis demonſtrauimus,propoſitione quinta,& ſexta: altitudo enim in utriſque eadem eſt, & baſes inter ſe ſe eandem habent proportionem. ergo ut pyramis a g b ad pyramidem c g d,ita eſt conus, uel coni portio a g b ad a g d conum, uel coni portionem: & per conuerſionẽ rationis,ut pyramis a g b ad fruſtũ à pyramide abſciſſum, ita conus uel coni portio a g b ad fruſtum a d. ex æquali igitur,ut pyramis q ad fruſtum à pyramide abſciſſum, ita conus uel coni portio q ad

6. 11. duodecimi

fruſtum a d. Sed pyramis q æqualis eſt fruſto à pyramide abſciſſo, ut demonſtrauimus. ergo & conus, uel coni portio q, cuius baſis ex tribus circulis, uel ellipſibus a b, e f, c d conſtat, & altitudo eadem, quæ fruſti: ipſi fruſto a d eſt æqualis. atque illud eſt, quod demonſtrare oportebat.

THEOREMA XXI. PROPOSITIO XXVI.

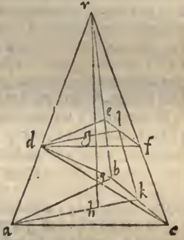
CVIVSLIBET fruſti à pyramide, uel cono, uel coni portione abſciſſi, centrum grauitatis eſt in axe, ita ut eo primum in duas portiones diuiſo, portio ſuperior, quæ minorem baſim attingit ad portionem reliquam eam habeat proportionem, quam duplum lateris, uel diametri maioris baſis, vnà cum latere, uel diametro minoris, ipſi reſpondente, habet ad duplum lateris, uel diametri minoris baſis vnà cũ latere, uel diametro maioris: deinde à puncto diuiſionis quarta parte ſuperioris portionis in ipſa ſumpta: & rurſus ab inferioris portionis termino, qui eſt ad baſim maiorem, ſumpta quarta parte totius axis: centrum ſit in linea, quæ his finibus continetur, atque in eo lineæ puncto, quo ſic diuiditur, ut tota linea ad partem propinquiorem minori baſi, eãdem proportionem habeat, quam fruſtum ad pyramidẽ, uel conum, uel coni portionem, cuius baſis ſit eadem, quæ baſis maior, & altitudo fruſti altitudini æqualis.

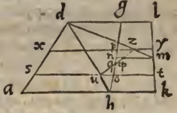
sit

Sit fruſtum a e a pyramide, quæ triangularem baſim habeat abſciſſum: cuius maior baſis triangulum a b c, minor d e f; & axis g h. ducto autem plano per axem & per lineã d a, quod ſectionem faciat d a k l quadrilaterum; puncta K l lineas b c, e f bifariam ſecabunt. nam cum g h ſit axis fruſti: erit h centrum grauitatis trianguli a b c: & g centrum trianguli d e f: centrum uero cuiuslibet trianguli eſt in recta linea, quæ ab angulo ipſius ad dimidiã baſim ducitur ex decimatertia primi libri Archimedis de cẽtro grauitatis planorum. quare centrũ grauitatis trapezii b c f e eſt in linea K l, quod ſit m: & à puncto m ad axem ducta m n ipſi a k, uel d l æquidiſtante; erit axis g h diuiſus in portiones g n, n h, quas diximus: eandem enim proportionem habet g n ad n h, quã l m ad m k. At l m ad m K habet eam, quã duplum lateris maioris baſis b c una cum latere minoris e f ad duplum lateris e f unà cum latere b c, ex ultima eiuſdem libri Archimedis. Itaque à linea n g abſcindatur, quarta pars, quæ ſit n p: & ab axe h g abſcindatur itidem quarta pars h o: & quam proportionem habet fruſtum ad pyramidem, cuius maior baſis eſt triangulum a b c, & altitudo ipſi æqualis; habeat o p ad p q. Dico centrum grauitatis fruſti eſſe in linea p o, & in puncto q. namque ipſum eſſe in linea g h manifeſte conſtat. protractis enim fruſti pla

3. diffi. huius.

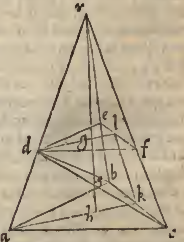
Vltima eiuſdẽ libri Archimedis.

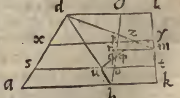




nis, quouſque in unum punctum r conueniant; erit pyramidis a b c r, & pyramidis d e f r grauitatis centrum in linea r h. ergo & reliquæ magnitudinis, uidelicet fruſti centrum in eadem linea neceſſario comperietur. Iungantur d b, d c, d h, d m: & per lineas d b, d c ducto altero plano intelligatur fruſtum in duas pyramides diuiſum: in pyramidem quidem, cuius baſis eſt triangulum a b c, uertex d: & in eam, cuius idem uertex, & baſis trapezium b c f e. erit igitur pyramidis a b c d axis d h, & pyramidis b c f e d axis d m: atque erunt tres axes g h, d h, d m in eodem plano d a K l. ducatur præterea per o linea ſ t ipſi a K æquidiſtãs, quæ lineam d h in u ſecet: per p uero ducatur x y æquidiſtans eidem, ſecansque d m in z: & iungatur z u, quæ ſecet g h in φ. tranſibit ea per q: & erunt φ q unum, atque idem punctum; ut inferius apparebit. Quoniam igitur linea u o

2. ſexti. æquidiſtat ipſi d g, erit d u ad u h, ut g o ad o h. Sed g o tripla eſt o h. quare & d u ipſius u h eſt tripla: & ideo pyramidis a b c d centrum grauitatis erit punctum u. Rurſus quoniam z y ipſi d l æquidiſtat, d z ad z m eſt, ut l y ad y m: eſtque l y ad y m, ut g p ad p n. ergo d z ad z m eſt, ut g p ad p n. Quòd cum g p ſit tripla p n; erit etiam d z ipſius z m tripla. atque ob eandem cauſſam punctum z eſt centrũ grauitatis pyramidis b c f e d. iuncta igitur z u, in ea erit cẽtrum





gra-

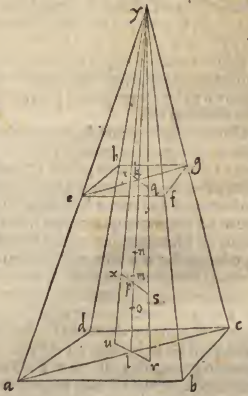
grauitatis magnitudinis, quæ ex utriſque pyramidibus cõ ſtat; hoc eſt ipſius fruſti. Sed fruſti centrum eſt etiam in axe g h. ergo in puncto φ, in quo lineæ z u, g h conueniunt. Itaque u φ ad φ z eam proportionem habet, quam pyramis b c f e d ad pyramidem a b c d. & componendo u z ad z φ eam habet, quam fruſtum ad pyramidem a b c d. Vt uero u z ad z τ, ita o p ad p φ ob ſimilitudinem triangulorum, u o τ, z p τ. quare o p ad p φ eſt ut fruſtum ad pyramidem a b c d. ſed ita erat o p ad p q. æquales igitur ſunt p τ, p q: & q φ unum atque idem punctum. ex quibus ſequitur lineam z u ſecare o p in q: & propterea pũctum q ipſius fruſti grauitatis centrum eſſe.

8. primi libri Archimedis de cẽtro grauitatis planorum

7. quinti.

Sit fruſtum a g à pyramide, quæ quadrangularem baſim habeat abſciſſum, cuius maior baſis a b c d, minor e f g h, & axis κ l. diuidatur autem primũ k l, ita ut quam proportionem habet duplum lateris a b unà cum latere e f ad duplum lateris e f unà cum a b; habeat k m ad m l. deinde à pũcto m ad k ſumatur quarta pars ipſius m κ, quæ ſit m n. & rurſus ab l ſumatur quarta pars totius axis l k, quæ ſit l o. poſtremo fiat o n ad n p, ut fruſtum a g ad pyramidẽ, cuius baſis ſit eadem, quæ fruſti, & altitudo æqualis. Dico punctum p fruſti a g grauitatis centrum eſſe. ducantur enim a c, e g: & intelligantur duo fruſta triangulares baſes habentia, quorum alterum l f ex baſibus a b c, e f g cõſtet; alterum l h ex baſibus a c d, e g h. Sitq; fruſti l f axis q r; in quo grauitatis centrum s: fruſti uero l h axis t u, & x grauitatis centrum: deinde iungantur u r, t q, x s. tranſibit u r per l: quoniam l eſt centrum grauitatis quadranguli a b c d: & puncta r u grauitatis centra triangulorum a b c, a c d; in quæ quadrangulum ipſum diuiditur. eadem quoque ratione t q per punctum k tranſibit. At uero proportiones, ex quibus fruſtorum grauitatis centra inquirimus, eædem ſunt in toto fruſto a g, & in fruſtis l f, l h. Sunt enim per octauam huius quadrilatera a b c d, e f g h ſimilia:

itemq; ſimilia triangula a b c, e ſ g: & a c d, e g h. idcircoq; latera ſibi ipſis reſpondentia eandem inter ſe ſe proportionem ſeruant. Vt igitur duplum lateris a b unà cum latere e f ad duplum lateris e f unà cum a b, ita eſt duplum a d lateris unà cum latere e h ad duplum e h unà cum a d: & ita in aliis. Rurſus fruſtum a g ad pyramidẽ, cuius eadem eſt baſis, & æqualis altitudo eandem proportionẽ habet, quam fruſtũ l f ad pyramidẽ, quæ eſt eadẽ baſi, & æquali altitudine: & ſimiliter quam l h fruſtum ad pyramidem, quæ ex eadẽ baſi, & æquali altitudine conſtat. nam ſi inter ipſas baſes mediæ proportionales conſtituantur, tres baſes ſimul ſumptæ ad maiorem baſim in omnibus eodem modo ſe habebunt. Vnde fit, ut axes K l, q r, t u à punctis p s x in eandem proportionem ſecentur. ergo linea x s per p tranſibit: & lineæ r u, s x, q t inter ſe æquidiſtantes erunt. Itaque cum fruſti a g latera producta



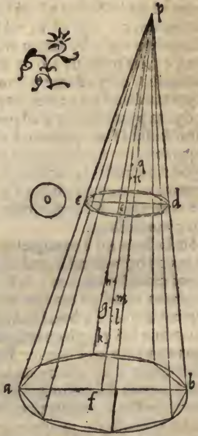
2. ſexti.

ducta

ducta fuerint, ita ut in unum punctum y coeant, erunt triã gala u y l, x y p, t y k inter ſe ſimilia: & ſimilia etiam triangu la l y r, p y s, k y q. quare ut in 19 huius, demonſtrabitur x p, ad p s: itemq; t k ad k q eandem habere proportionẽ, quam u l ad l r. Sed ut u l ad l r, ita eſt triangulum a b c ad triangulum a c d: & ut t k ad K q, ita triangulum e f g ad triangulum e g h. Vt autem triangulum a b c ad triangu-lum a c d, ita pyramis a b c y ad pyramidem a c d y. & ut triangulum e f g ad triangulum e g h, ita pyramis e f g y ad pyramidem e g h y; ergo ut pyramis a b c y ad pyramidẽ a c d y, ita pyramis e f g y ad pyramidem e g h y. reliquum igitur fruſtũ l f ad reliquum fruſtũ l h eſt ut pyramis a b c y ad pyramidem a c d y, hoc eſt ut u l ad l r, & ut x p ad p s. Quod cum fruſti l f centrum grauitatis ſit s: & fruſti l h ſit centrum x: conſtat punctum p totius fruſti a g grauitatis eſſe centrum. Eodem modo fiet demonſtratio etiam in aliis pyramidibus. 19. quinti 8. Archi-medis.

Sit fruſtum a d à cono, uel coni portione abſciſſum, cu-ius maior baſis circulus, uel ellipſis circa diametrum a b; minor circa diametrum c d: & axis e f. diuidatur autẽ e f in g, ita ut e g ad g f eandem proportionem habeat, quam duplum diametri a b unà cum diametro c d ad duplum c d unà cum a b. Sitq; g h quarta pars lineæ g e: & ſit f K item quarta pars totius f e axis. Rurſus quam proportionem habet fruſtum a d ad conum, uel coni portionem, in eadẽ baſi, & æquali altitudine, habeat linea K h ad h l. Dico pun-ctum l fruſti a d grauitatis centrum eſſe. Si enim fieri po-teſt, ſit m centrum: producaturq; l m extra fruſtum in n: & ut n l ad l m, ita fiat circulus, uel ellipſis circa diametrũ a b ad aliud ſpacium, in quo ſit o. Itaque in circulo, uel ellipſi circa diametrum a b rectilinea figura plane deſcri-batur, ita ut quæ relinquuntur portiones ſint o ſpacio mi-nores: & intelligatur pyramis a p b, baſim habens rectili-neam figuram in circulo, uel ellipſi a b deſcriptam: à qua

ſruſtum pyramidis ſit abſciſſum . erit ex iis quæ proxime tradidimus, fruſti pyramidis a d centrum grauitatis l. Quoniam igitur portiones ſpacio o minores ſunt; habebit circulus, uel ellipſis a b ad portiones dictas maiorē proportionem, quàm n l ad l m. ſed ut circulus, uel ellipſis a b ad portiones, ita a p b conus, uel coni portio ad ſolidas portiones, id quod ſupra demonſtratum eſt: & ut circulus
11.huius uel ellipſis c d ad portiones, quæ ipſi inſunt, ita conus, uel coni portio c p d ad ſolidas ipſius portiones. Quòd cum figuræ in circulis, uel ellipſibus a b c d deſcriptæ ſimiles ſint, erit proportio circuli, uel ellipſis a b ad ſuas portiones, eadē, quæ circuli uel ellipſis c d ad ſuas. ergo conus, uel coni portio a p b ad portiones ſolidas eādem habet proportionē, quam conus, uel coni portio c p d ad ſolidas ipſius
19.quinti portiones. reliquum igitur coni, uel coni portionis fruſtū, ſcilicet a d ad reliquas portiones ſolidas in ipſo contentas eandem proportionē habet, quam conus, uel coni portio a p b ad ſolidas portiones: hoc eſt eandem, quam circulus, uel ellipſis a b ad portiones planas. quare fruſtum coni, uel coni portionis a d



ad

ad portiones ſolidas maiorem habet proportionẽ, quàm n l ad l m: & diuidendo fruſtum pyramidis ad dictas portiones maiorem proportionem habet, quàm n m ad m l. fiat igitur ut fruſtum pyramidis ad portiones, ita q m ad m l. Itaque quoniam à fruſto coni, uel coni portionis a d, cuius grauitatis centrum eſt m, aufertur fruſtum pyramidis habens centrum l; erit reliquæ magnitudinis, quæ ex portionibus ſolidis conſtat, grauitatis cẽtrum in linea l m producta, atque in puncto q, extra figuram poſito. quod fieri nullo modo poteſt. relinquitur ergo, ut punctum l ſit fruſti a d grauitatis centrum. quæ omnia demonſtranda proponebantur.

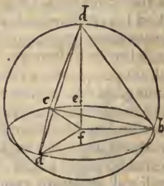
THEOREMA XXII. PROPOSITIO XXVII.

OMNIVM ſolidorum in ſphæra deſcriptorum, quæ æqualibus, & ſimilibus baſibus continentur, centrum grauitatis eſt idem, quod ſphæræ centrum.

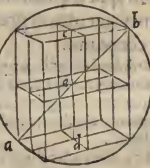
Solida eiuſmodi corpora regularia appellare ſolent, de quibus agitur in tribus ultimis libris elementorum: ſunt autem numero quinque, tetrahedrum, uel pyramis, hexahedrum, uel cubus, octahedrum, dodecahedrum, & icoſahedrum.

Sit primo a b c d pyramis ĩ ſphæra deſcripta, cuius ſphæræ centrum ſit e. Dico e pyramidis a b c d grauitatis eſſe centrum. Si enim iuncta d e producatur ad baſim a b c in f; ex iis, quæ demõſtrauit Campanus in quartodecimo libro elementorum, propoſitione decima quinta, & decima ſeptima, erit f centrum circuli circa triangulum a b c deſcripti: atque erit e f ſexta pars ipſius ſphæræ axis. quare ex prima huius conſtat trianguli a b c grauitatis centrum eſſe punctum f: & idcirco lineam d f eſſe pyramidis axem.

At cum e f ſit ſexta pars axis ſphæræ, erit d e tripla e f. ergo punctum e eſt grauitatis centrum ipſius pyramidis: quod in uigeſima ſecunda huius demonſtratum fuit. Sed e eſt centrum ſphæræ. Sequitur igitur, ut centrum grauitatis pyramidis in ſphæra deſcriptæ idem ſit, quod ipſius ſphæræ centrum.

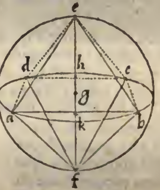


Sit cubus in ſphæra deſcriptus a b, & oppoſitorum planorum lateribus bifariam diuiſis, per puncta diuiſionum plana ducantur, ut communis ipſorum ſectio ſit recta linea c d. Itaque ſi ducatur a b, ſolidi ſcilicet diameter, lineæ a b, c d ex trigeſimanona undecimi ſeſe bifariam ſecabunt. ſecent autem in puncto e. erit e centrũ grauitatis ſolidi a b, id quod demonſtratum eſt in octaua huius. Sed quoniam ab eſt ſphæræ diametro æqualis, ut in decima quinta propoſitione tertii decimi libri elemẽtorum oſtenditur: punctum e ſphæræ quoque centrum erit. Cubi igitur in ſphæra deſcripti grauitatis centrum idem eſt, quod centrum ipſius ſphæræ.



Sit octahedrum a b c d e f, in ſphæra deſcriptum, cuius ſphæræ centrum ſit g. Dico punctum g ipſius octahedri grauitatis centrum eſſe. Conſtat enim ex iis, quæ demonſtrata ſunt à Campano in quinto decimo libro elementorum, propoſitione ſextadecima eiuſmodi ſolidum diuidi in duas pyramides æquales, & ſimiles; uidelicet in pyramidem,

dem, cuius baſis eſt quadratum a b c d, & altitudo e g: & in pyramidem, cuius eadẽ baſis, altitudoq; f g; ut ſint e g, g f ſemidiametri ſphæræ, & linea una. Cũ igitur g ſit ſphæræ centrum, erit etiam centrum circuli, qui circa quadratũ a b c d deſcribitur: & propterea eiuſdem quadrati grauitatis centrum: quod in prima propoſitione huius demonſtratum eſt. quare pyramidis a b c d e axis erit e g: & pyramidis a b c d f axis f g. Itaque ſit h centrum grauitatis pyramidis a b c d e, & pyramidis a b c d f centrum ſit k: perſpicuum eſt ex uigeſima ſecunda propoſitione huius, lineã e h triplam eſſe h g: cõponendoq; e g ipſius g h quadruplam. & eadẽ ratione f g quadruplã ipſius g k. quod cum e g, g f ſint æquales, & h g, g k neceſſario æquales erunt. ergo ex quarta propoſitione primi libri Archimedis de cẽtro grauitatis planorũ, totius octahedri, quod ex dictis pyramidibus conſtat, centrum grauitatis erit punctum g idem, quod ipſius ſphæræ centrum.



Sit icoſahedrum a d deſcriptum in ſphæra, cuius centrũ ſit g. Dico g ipſius icoſahedri grauitatis eſſe centrum. Si enim ab angulo a per g ducatur recta linea uſque ad ſphæræ ſuperficiem; conſtat ex ſexta decima propoſitione libri tertii decimi elementorum, cadere eam in angulum ipſi a oppoſitum. cadat in d: ſitq; una aliqua baſis icoſahedri triangulum a b c: & iunctæ b g, c g producantur, & cadant in angulos e f, ipſis b c oppoſitos. Itaque per triangula a b c, d e f ducantur plana ſphæram ſecantia. erunt hæ ſe-

ctiones circuli ex prima propoſitione ſphæricorum Theo doſii: unus quidem circa triangulum a b c deſcriptus: alter uero circa d e f: & quoniam triangula a b c, d e f æqualia ſunt, & ſimilia; erunt ex prima, & ſecunda propoſitione duodecimi libri elementorum, circuli quoque inter ſe ſe æquales. poſtremo à centro g ad circulum a b c perpendicularis ducatur g h; & alia perpendicularis ducatur ad circulum d e f, quæ ſit g k; & iungantur a h, d k. perſpicuum eſt ex corollario primæ ſphæricorum Theodoſii, punctum h centrum eſſe circuli a b c, & k centrum circuli d e f. Quoniam igitur triangulorum g a h, g d K latus a g eſt æquale lateri g d; ſunt enim à centro ſphæræ ad ſuperficiem: atque eſt a h æquale d k: & ex ſexta propoſitione libri primi ſphæricorum Theodoſii g h ipſi g K: triangulum g a h æquale erit, & ſimile g d k triangulo: & angulus a g h æqualis an-

13. primi gulo d g K. ſed anguli a g h, h g d ſunt æquales duobus re-

ctis. ergo & ipſi h g d, d g k duobus rectis æquales erunt.

14. primi & idcirco h g, g K una, atque eadem erit linea. cum autem h ſit centrũ circuli, & trianguli a b c grauitatis centrũ probabitur ex iis, quæ in prima propoſitione huius tradita ſunt. quare g h erit pyramidis a b c g axis. & ob eandem cauſſam g k axis pyramidis d e f g. Itaque centrum grauitatis pyramidis a b c g ſit pũctum l, & pyramidis d e f g ſit m. Similiter ut ſupra demonſtrabimus m g, g l inter ſe æquales eſſe, & punctum g grauitatis centrum magnitudinis, quæ ex utriſque pyramidibus conſtat. eodem modo demonſtrabitur, quarumcunque duarum pyramidum, quæ opponuntur, grauitatis centrũ



eſſe

eſſe punctum g. Sequitur ergo ut icoſahedri centrum grauitatis ſit idem, quod ipſius ſphæræ centrum.

Sit dodecahedrum a f in ſphæra deſignatum, ſitque ſphæræ centrum m. Dico m centrum eſſe grauitatis ipſius dodecahedri. Sit enim pentagonum a b c d e una ex duodecim baſibus ſolidi a f: & iuncta a m producatur ad ſphæræ ſuperficiem. cadet in angulum ipſi a oppoſitum; quod colligitur ex decima ſeptima propoſitione tertiidecimi libri elementorum. cadat in f. at ſi ab aliis angulis b c d e per cẽtrum itidem lineæ ducantur ad ſuperficiem ſphæræ in puncta g h k l; cadent hæ in alios angulos baſis, quæ ipſi a b c d baſi opponitur. tranſeant ergo per pentagona a b c d e, f g h K l plana ſphæram ſecantia, quæ facient ſectiones circulos æquales inter ſe ſe. poſtea ducantur ex centro ſphæræ m perpendiculares ad plana dictorum circulorũ; ad circulum quidem a b c d e perpendicularis m n: & ad circulum f g h K l ipſa m o, erunt puncta n o circulorũ centra: & lineæ m n, m o inter ſe æquales: quòd circuli æquales ſint. Eodem modo, quo ſupra, demonſtrabimus lineas m n, m o in unã atque eandem lineam conuenire. ergo cum puncta n o ſint centra circulorum, conſtat ex prima huius & pentagonorũ grauitatis eſſe centra: idcircoq; m n, m o pyramidum a b c d e m, f g h K l m axes. ponatur a b c d e m pyramidis grauitatis centrum p: & pyramidis f g h k l m ipſum q centrum. erunt p m, m q æquales, & punctum m grauitatis centrum magnitudinis, quæ ex ipſis pyramidibus conſtat. eodẽ modo probabitur quarumlibet pyramidum, quæ è regione opponuntur, centrũ



corol. primæ ſphæricorum Theod. 6. primi ſphæricorum.

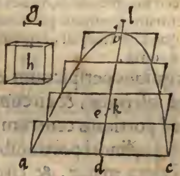
grauitatis eſſe punctum m. patet igitur totius dodecahedri, centrum grauitatis idē eſſe, quod & ſphæræ ipſum comprehendentis centrum. quæ quidem omnia demonſtraſſe oportebat.

PROBLEMA VI. PROPOSITIO XXVIII.

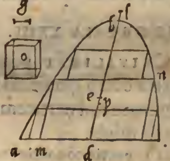
Data qualibet portione conoidis rectanguli, abſciſſa plano ad axem recto, uel non recto; fieri poteſt, ut portio ſolida inſcribatur, uel circumſcribatur ex cylindris, uel cylindri portionibus, æqualem habentibus altitudinem, ita ut recta linea, quæ inter centrum grauitatis portionis, & figuræ inſcriptæ, uel circumſcriptæ interiicitur, ſit minor qualibet recta linea propoſita.

Sit portio conoidis rectanguli a b c, cuius axis b d, grauitatisq; centrum e: & ſit g recta linea propoſita. quam uero proportionem habet linea b e ad lineam g, eandem habeat portio conoidis ad ſolidum h: & circumſcribatur portioni figura, ſicuti dictum eſt, ita ut portiones reliquæ ſint ſolido h minores: cuius quidem figuræ centrum grauitatis ſit punctum k. Dico lineā k e minorem eſſe linea g propoſita. niſi enim ſit minor, uel æqualis, uel maior erit. & quo-
8.quinti. niam figura circumſcripta ad reliquas portiones maiorem proportionem habet, quàm portio conoidis ad ſolidum h; hoc eſt maiorem, quàm b e ad g: & b e ad g non minorem habet proportionem, quàm ad k e, propterea quod k e non ponitur minor ipſa g: habebit figura circumſcripta ad portiones reliquas maiorem proportionem quàm b e ad e k:
19.quinti ex traditione Campani. & diuidendo portio conoidis ad reliquas portiones habebit maiorem, quàm b k ad k e. quare ſi fiat ut portio conoidis

noidis ad portiones reliquas, ita alia linea, quæ ſit l κ ad κ e: erit l k maior, quam b k: & ideo punctum l extra portionem cadet. Quoniã igitur à figura circumſcripta, cuius grauitatis centrum eſt k, auffertur portio conoidis, cuius centrum e: habetq; l K ad K e eam proportionem, quam portio conoidis ad reliquas portiones; erit punctum l extra portionem cadẽs, centrum magnitudinis ex reliquis portionibus compoſitæ. illud autem fieri nullo modo poteſt. quare conſtat lineam k e ipſa g linea propoſita minorem eſſe.



Rurſus inſcribatur portioni figura, uidelicet cylindrus m n, ut ſit ipſius altitudo æqualis dimidio axis b d: & quam proportionem habet b e ad g, habeat m n cylindrus ad ſolidum o. inſcribatur deinde eidem alia figura, ita ut portiones reliquæ ſint ſolido o minores: & centrum grauitatis figuræ ſit p. Dico lineam p e ipſa g minorẽ eſſe. ſi enim non ſit minor, eodem, quo ſupra modo demonſtrabimus figuram inſcriptam ad reliquas portiones maiorem proportionem habere, quàm b e ad e p. & ſi fiat alia linea l e ad e p, ut eſt figura inſcripta ad reliquas portiones, pũctum l extra por



tionem cadet: Itaque cum à portione conoidis, cuius grauitatis centrum e auferatur inſcripta figura, centrum habens p: & ſit l e ad e p, ut figura inſcripta ad portiones reliquas: erit magnitudinis, quæ ex reliquis portionibus conſtat, centrum grauitatis punctum l, extra portionem cadens. quod fieri nequit. ergo linea p e minor eſt ipſa g linea propoſita.

Ex quibus perſpicuum eſt centrum grauitatis figuræ inſcriptæ, & circumſcriptæ eo magis accedere ad portionis centrum, quo pluribus cylindris, uel cylindri portionibus conſtet: fiatq; figura inſcripta maior, & circumſcripta minor. & quanquam continenter ad portionis centrū propius admoueatur: nunquam tamen ad ipſum perueniet. ſequeretur enim figuram inſcriptam, nō ſolum portioni, ſed etiam circumſcriptæ figuræ æqualem eſſe. quod eſt abſurdum.

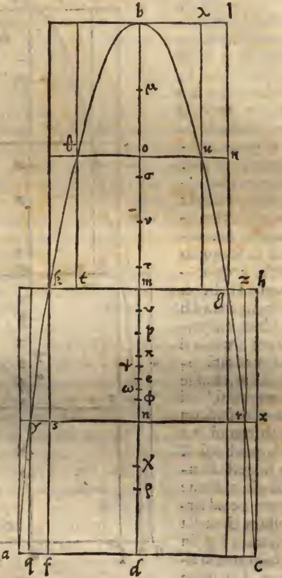
THEOREMA XXIII. PROPOSITIO XXIX.

CVIVSLIBET portionis conoidis rectanguli axis à cētro grauitatis ita diuiditur, ut pars quæ terminatur ad uerticem, reliquæ partis, quæ ad baſim ſit dupla.

SIT portio conoidis rectanguli uel abſciſſa plano ad axem recto, uel non recto: & ſecta ipſa altero plano per axē ſit ſuperficiei ſectio a b c rectanguli coni ſectio, uel parabole; plani abſcindentis portionem ſectio ſit recta linea a c: axis portionis, & ſectionis diameter b d. Sumatur autem in linea b d punctum e, ita ut b e ſit ipſius e d dupla. Dico

e por-

e portionis a b c grauitatis eſſe centrum. Diuidatur enim b d bifariam in m: & rurſus d m, m b bifariam diuidantur in punctis n, o: inſcribaturq; portioni figura ſolida, & altera circumſcribatur ex cylindris æqualem altitudinem habentibus, ut ſuperius dictũ eſt. Sit autem primum figura inſcripta cylĩdrus f g: & circũſcripta ex cylindris a h, K l conſtet. punctum n erit centrum grauitatis figuræ inſcriptæ, mediũ ſcilicet ipſius d m axis: atq; idẽ erit centrum cylindri a h: & cylindri κ l centrũ o, axis b m medium. quare ſi li



7. huius

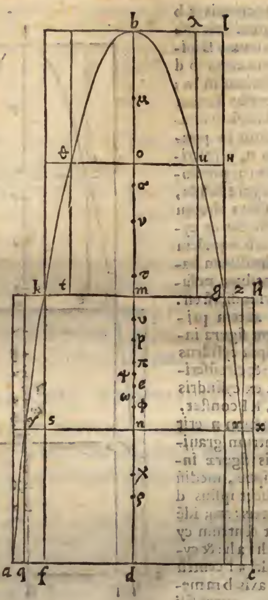
neam o n ita diuiſerimus in p, ut quã proportionẽ habet cylindrus a h ad cylindrum κ l, habeat linea o p ad p n: centrum grauitatis totius figuræ circũſcriptæ erit punctum p. Sed cylindri, qui ſunt æquali altitudine, eandem inter ſe ſe, quam baſes proportionem habent: eſtq; ut linea d b ad b m, ita quadratũ lineæ a d ad quadratũ ipſius K m, ex uigeſima primi libri conicorũ: & ita quadratum a c ad quadratũ K g: hoc eſt circulus circa diametrum a c ad circulum circa diametrum k g. dupla eſt autem linea d b lineæ

8. primi libri Archimedis

11. duodecimi.

15. quinti

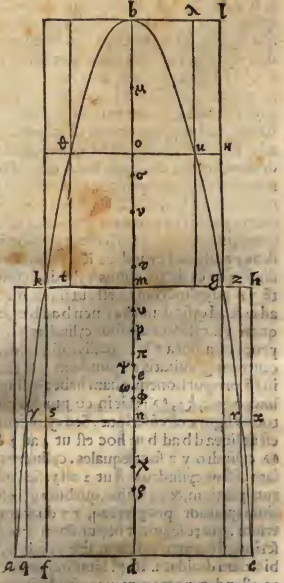
2. duodecimi.



b m.

b m. ergo circulus a c circuli k g: & idcirco cylindrus a h cylindri k l duplus erit. quare & linea o p dupla ipſius p n. Deinde inſcripta & circumſcripta portioni alia figura, ita ut inſcripta conſtituatur ex tribus cylindris q r, s g, t u: circumſcripta uero ex quatuor a x, y z, κ ν, θ λ: diuidantur b o, o m, m n, n d bifariam in punctis μ ν π ρ. Itaque cylindri θ λ centrum grauitatis eſt punctum μ: & cylindri κ ν centrum ν. ergo ſi linea μ ν diuidatur in σ, ita ut μ σ ad σ ν proportionẽ eã habeat, quam cylindrus κ ν ad cylindrum θ λ, uidelicet quam quadratum κ m ad quadratum θ o, hoc eſt, quam linea m b ad b o: erit σ centrum magnitudinis compoſitæ ex cylindris κ ν, θ λ. & cum linea m b ſit dupla b o, erit & μ σ ipſius σ ν dupla. præterea quoniam cylindri y z centrum grauitatis eſt π, linea σ π ita diuiſa in τ, ut σ τ ad τ π eam habeat proportionem, quam cylindrus y z ad duos cylindros κ ν, θ λ; erit τ centrum magnitudinis, quæ ex dictis tribus cylindris conſtat. cylindrus autẽ y z ad cylindrum θ λ eſt, ut linea n b ad b o, hoc eſt ut 3 ad 1: & ad cylindrum κ ν, ut n b ad b m, uidelicet ut 3 ad 2. quare y z cylĩdrus duobus cylindris κ ν, θ λ æqualis erit. & propterea linea σ τ æqualis ipſi τ π. denique cylindri a x centrum grauitatis eſt punctum ρ. & cum π ρ diuiſa fuerit in eã proportionem, quam habet cylindrus a x ad tres cylindros y z, κ ν, θ λ: erit in eo puncto centrum grauitatis totius figuræ circũſcriptæ. Sed cylindrus a x ad ipſum y z eſt ut linea d b ad b n: hoc eſt ut 4 ad 3: & duo cylindri κ ν, θ λ cylindro y z ſunt æquales. cylindrus igitur a x ad tres iam dictos cylindros eſt ut 2 ad 3. Sed quoniã μ σ eſt duarum partium, & σ ν unius, qualium μ π eſt ſex; erit σ π partium quatuor: propterea q; τ π duarum, & π ρ, hoc eſt π ρ trium. quare ſequitur ut punctum π totius figuræ circumſcriptæ ſit centrum. Itaque fiat τ υ ad υ π, ut μ σ ad σ τ: & υ ρ bifariam diuidatur in φ. Similiter ut in circumſcripta figura oſtendetur centrum magnitudinis compoſitæ ex cylin- 20. primi conicorũ

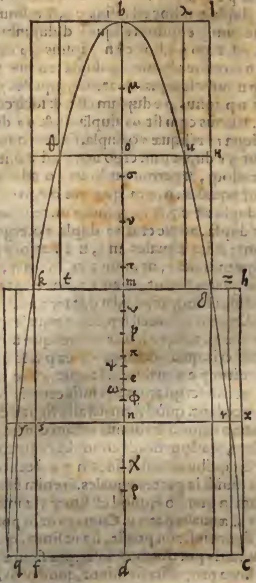
dris ſg, tu eſſe punctum υ: & totius figuræ inſcriptæ, quæ cōſtat ex cylindris q r, ſ g, tu eſſe φ centrum. Sunt enim hi cylindri æquales & ſimiles cylindris y z, K n, θ λ, figuræ circumſcriptæ. Quoniā igitur ut b e ad e d, ita eſt o p ad p n; utraq; enim utriuſque eſt dupla: erit componendo, ut b d ad d e, ita o n ad n p; & permutando, ut b d ad o n, ita d e ad n p. Sed b d dupla eſt o n. ergo & e d ipſius n p dupla erit. quòd ſi e d bifariam diuidatur ī χ, erit χ d, uel e χ æqualis n p: & ſublata e n, quæ eſt cōmunis utrique e χ, p n,



relin-

relinquetur p e ipſi n χ æqualis. cum autem b e ſit duplã e d, & o p dupla p n, hoc eſt ipſius e χ, & reliquum, uidelicet b o unà cum p e ipſius reliqui χ d duplum erit. eſtque b o dupla ρ d. ergo p e, hoc eſt n χ ipſius χ ρ dupla. ſed d n dupla eſt n ρ. reliqua igitur d χ dupla reliquæ χ n. ſunt autem d χ, p n inter ſe æquales: itemq; æquales χ n, p e. quare conſtat n p ipſius p e duplam eſſe. & idcirco p e ipſi e n æqualem. Rurſus cum ſit μ υ dupla o υ, & μ σ dupla σ υ; erit etiam reliqua υ σ reliquæ σ o dupla. Eadem quoque ratione cõcludetur π υ dupla υ m. ergo ut υ σ ad σ o, ita π υ ad υ m: componendoq;, & permutando, ut υ o ad π m, ita o σ ad m υ: & ſunt æquales υ o, π m. quare & o σ, m υ æquales. præterea σ π dupla eſt π τ, & υ π ipſius π m. reliqua igitur σ υ reliquæ m τ dupla. atque erat υ σ dupla σ o. ergo m τ, σ o æquales ſunt: & ita æquales m υ, n ϕ. at o σ, eſt æqualis m υ. Sequitur igitur, ut omnes o σ, m τ, m υ, n ϕ inter ſe ſint æquales. Sed ut ρ π ad π τ, hoc eſt ut 3 ad 2, ita n d ad d χ: permutãdoq; ut ρ π ad n d, ita π τ ad d χ. & ſũt æquales ρ π, n d. ergo d χ, hoc eſt n p, & π τ æquales. Sed etiam æquales n π, π m. reliqua igitur π p reliquæ m τ, hoc eſt ipſi n ϕ æqualis erit. quare dempta p π ex p e, & ϕ n dempta ex n e, relinquitur p e æqualis e ϕ. Itaque π, ϕ centra figurarũ ſecundo loco deſcriptarum a primis centris p n æquali interuallo recedunt. quòd ſi rurſus aliæ figuræ deſcribantur, eodem modo demonſtrabimus earum centra æqualiter ab his recedere, & ad portionis conoidis centrum propius ad moueri. Ex quibus conſtat lineam π ϕ à centro grauitatis portionis diuidi in partes æquales. Si enim fieri poteſt, non ſit centrum in puncto e, quod eſt lineæ π ϕ medium: ſed in ψ: & ipſi π ψ æqualis fiat ϕ ω. Cum igitur in portione ſolida quædam figura inſcribi poſſit, ita ut linea, quæ inter centrum grauitatis portionis, & inſcriptæ figuræ interiicitur, qualibet linea propoſita ſit minor, quod proxime demonſtrauimus: perueniet tandem ϕ centrum inſcriptæ figuræ

19. quinti


b
λ
l
d
n
μ
θ
o
u
κ
σ
ν
τ
k
t
m
h
g
υ
p
π
ψ
e
ω
φ
n
y
s
r
x
χ
ρ
a
q
f
d
c

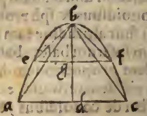
ad punctum ω. Sed quoniam π circumſcripta itidem alia figura æquali interuallo ad portionis centrum accedit, ubi primum φ applicuerit ſe ad ω, & π ad punctũ ψ, hoc eſt ad portionis centrum ſe applicabit. quod fieri nullo modo poſſe perſpicuum eſt. non aliter idem abſurdum ſequetur, ſi ponamus centrum portionis recedere à medio ad partes ω; eſſet enim aliquando centrum figuræ inſcriptæ idem quod portionis centrũ. ergo punctum e centrum erit grauitatis portionis a b c. quod demonſtrare oportebat.

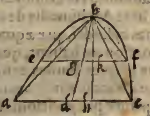
Quod autem ſupra demõſtratum eſt in portione conoidis recta per figuras, quæ ex cylindris æqualem altitudinem habentibus conſtant, idem ſimiliter demonſtrabimus per figuras ex cylindri portionibus conſtantes in ea portione, quæ plano non ad axem recto abſcinditur. ut enim tradidimus in commentariis in undecimam propoſitionem libri Archimedis de conoidibus & ſphæroidibus. portiones cylindri, quæ æquali ſunt altitudine eam inter ſe ſe proportionem habent, quam ipſarum baſes; baſes autẽ quæ ſunt ellipſes ſimiles eandem proportionem habere, quam quadrata diametrorum eiuſdem rationis, ex corollario ſeptimæ propoſitionis libri de conoidibus, & ſphæroidibus, manifeſte apparet. corol. 15 de conoidibus & ſphæroidibus.

THEOREMA XXIIII. PROPOSITIO XXX.

Si à portione conoidis rectanguli alia portio abſcindatur, plano baſi æquidiſtante; habebit portio tota ad eam, quæ abſciſſa eſt, duplam proportionem eius, quæ eſt baſis maioris portionis ad baſim minoris, uel quæ axis maioris ad axem minoris.

ABSCINDATVR à portione conoidis rectanguli a b c alia portio e b f, plano baſi æquidiſtante: & eadem portio ſecetur alio plano per axem; ut ſuperficiei ſectio ſit parabole a b c: planorũ portiones abſcindentium rectæ lineæ a c, e f: axis autem portionis, & ſectionis diameter b d; quam linea e f in puncto g ſecet. Dico portionem conoidis a b c ad portionem e b f duplam proportionem habere eius, quæ eſt baſis a c ad baſim e f; uel axis d b ad b g axem. Intelligantur enim duo coni, ſeu coni portiones a b c, e b f, eãdem baſim, quam portiones conoidis, & æqualem habentes altitudinem. & quoniam a b c portio conoidis ſeſquialtera eſt coni, ſeu portionis coni a b c; & portio e b f coni ſeu portionis coni e b f eſt ſeſquialtera, quod de-





monſtrauit Archimedes in propoſitionibus 23, & 24 libri de conoidibus, & ſphæroidibus: erit conoidis portio ad conoidis portionem, ut conus ad conum, uel ut coni portio ad coni portionem. Sed conus, uel coni portio a b c ad conum, uel coni portionem e b f compoſitam proportionem habet ex proportione baſis a c ad baſim e f, & ex proportione altitudinis coni, uel coni portionis a b c ad altitudinem ipſius e b f; ut nos demonſtrauimus in commentariis in undecimam propoſitionem eiuſdem libri Archimedis: altitudo autem ad altitudinem eſt, ut axis ad axem: quod quidem in conis rectis perſpicuum eſt, in ſcalenis ue-

M	ro

ro ita demonſtrabitur. Ducatur à puncto b ad planum baſis a c perpendicularis linea b h, quæ ipſam e f in K ſecet. erit b h altitudo coni, uel coni portionis a b c: & b K altitudo e f g. Quod cum lineæ a c, e f inter ſe æquidiſtent, ſunt enim planorum æquidiſtantium ſectiones: habebit d b ad b g proportionem eandem, quam h b ad b K. quare portio conoidis a b c ad portionem e f g proportionem habet compoſitam ex proportione baſis a c ad baſim e f; & ex proportione d b axis ad axem b g. Sed circulus, uel ellipſis circa diametrum a c ad circulum, uel ellipſim circa e f, eſt ut quadratum a c ad quadratum e f; hoc eſt ut quadratũ a d ad quadratũ e g. & quadratum a d ad quadratum e g eſt, ut linea d b ad lineam b g. circulus igitur, uel ellipſis circa diametrum a c ad circulũ, uel ellipſim circa e f, hoc eſt baſis ad baſim eandem proportionem habet, quã d b axis ad axem b g. ex quibus ſequitur portionem a b c ad portionem e b f habere proportionem duplam eius, quæ eſt baſis a c ad baſim e f: uel axis d b ad b g axem. quod demonſtrandum proponebatur.

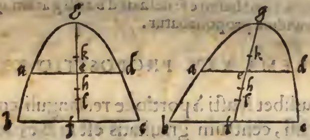
16. undecimi.
4 ſexti.
2. duodecimi
7. de conoidibus & ſphæroidibus
15. quinti
20. primi conicorũ

THEOREMA XXV. PROPOSITIO XXXI.

Cuiuslibet fruſti à portione rectanguli conoidis abſciſſi, centrum grauitatis eſt in axe, ita ut demptis primum à quadrato, quod fit ex diametro maioris baſis, tertia ipſius parte, & duabus tertiis quadrati, quod fit ex diametro baſis minoris: deinde à tertia parte quadrati maioris baſis rurſus dempta portione, ad quam reliquum qua

ioris baſis ad quadratum minoris: centrum ſit in eo axis puncto, quo ita diuiditur ut pars, quæ minorem baſim attingit ad alteram partem eandem proportionem habeat, quam dempto quadrato minoris baſis à duabus tertiis quadrati maioris, habet id, quod reliquum eſt unà cum portione à tertia quadrati maioris parte dempta, ad reliquā eiuſdem tertiæ portionem.

SIT fruſtum à portione rectanguli conoidis abſciſſum a b c d, cuius maior baſis circulus, uel ellipſis circa diametrum b c, minor circa diametrum a d; & axis e f. deſcribatur autem portio conoidis, à quo illud abſciſſum eſt, & pla-



no per axem ducto ſecetur; ut ſuperficiei ſectio ſit parabole b g c, cuius diameter, & axis portionis g f. deinde g f diuidatur in puncto h, ita ut g h ſit dupla h f. & rurſus g e in eandem proportionem diuidatur: ſitq; g k ipſius k e dupla. Iā ex iis, quæ proxime demonſtrauimus, conſtat centrum grauitatis portionis b g c eſſe h punctum: & portionis a g c punctum k. ſumpto igitur infra h puncto l, ita ut k h ad h l

eam

eam proportionem habeat, quam a b c d fruſtum ad portionem a g d; erit punctum l eius fruſti grauitatis cētrum: habebitq; componendo K l ad l h proportionem eandem, quam portio conoidis b g c ad a g d portionem. Itaq; quoniam quadratum b f ad quadratum a e, hoc eſt quadratum b c ad quadratum a d eſt, ut linea f g ad g e: erunt duæ tertiæ quadrati b c ad duas tertias quadrati a d, ut h g ad g k: & ſi à duabus tertiis quadrati b c demptæ fuerint duæ tertiæ quadrati a d: erit diuidēdo id, quod relinquitur ad duas tertias quadrati a d, ut h k ad k g. Rurſus duæ tertiæ quadrati a d ad duas tertias quadrati b c ſunt, ut k g ad g h: & duæ tertiæ quadrati b c ad tertiā partē ipſius, ut g h ad h f. ergo ex æquali id, quod relinquitur ex duabus tertiis quadrati b c, demptis ab ipſis quadrati a d duabus tertiis, ad tertiā partem quadrati b c, ut k h ad h f: & ad portionem eiuſdē tertiæ partis, ad quam unà cum ipſa portione, duplam proportionem habeat eius, quæ eſt quadrati b c ad quadratū a d, ut K l ad l h. habet enim K l ad l h eandem proportionem, quam conoidis portio b g c ad portionem a g d: portio autem b g c ad portionem a g d duplam proportionem habet eius, quæ eſt baſis b c ad baſim a d: hoc eſt quadrati b c ad quadratum a d; ut proxime demonſtratum eſt. quare dempto a d quadrato à duabus tertiis quadrati b c, erit id, quod relinquitur unà cum dicta portione tertiæ partis ad reliquam eiuſdem portionem, ut e l ad l f. Cum igitur centrum grauitatis fruſti a b c d ſit l, à quo axis e f in eam, quā diximus, proportionem diuidatur; conſtat uerū eſſe illud, quod demonſtrandum propoſuimus.

20. I. conoidicorum. 30 huius

FINIS LIBRI DE CENTRO GRAVITATIS SOLIDORVM.

BIBLIOTECA NAZ.
ROMA
VITT. EMANUELE